La règle de Borda et la décomposition des profils de préférences : une nouvelle axiomatisation

(Document de travail)

Hatem Smaoui
CEMOI- Université de La Réunion, 2010

Introduction

En théorie du vote, l'approche positionnelle consiste à établir la préférence collective en se basant sur l'information relative aux classements des différentes options dans les ordres de préférences individuelles. Les règles positionnelles simples (RPS) utilisent cette information et attribuent un certain nombre de points à chacun des rangs qu'une option peut occuper dans les classements individuels. Les options sont alors comparées en fonction des sommes de points qu'elles obtiennent. Le système positionnel le plus simple et le plus utilisé est celui de la pluralité où chacune des options reçoit un point pour une première place et zéro point pour toute autre position. Un autre mode d'attribution des points a été proposé par Borda [2] : lorsque m candidats sont à départager, chacun d'eux obtient $m - i$ points à chaque fois qu'il est classé i^{eme} dans une préférence individuelle. Dans la littérature, cette classe de règles de décision, appelées aussi méthodes de classement par points, est souvent opposée à la famille des règles de comparaisons par paires qui déduisent le choix collectif des résultats des duels majoritaires entre les différents candidats.

le théorème de Smith [125] et le théorème de Young [133] donnent les caractérisations axiomatiques de cette classe de règles par l'axiome de séparabilité dans le contexte de rangement des options et par son analogue (l'axiome de consistance) dans le contexte de sélection. Myerson [10] à étendu ces résultats à un cadre formel plus large, celui des systèmes de vote abstraits. Ces résultats de caractérisation constituent un fort argument théorique en faveur de l'usage de ces règles de décision. Parmi toutes les RPS, la règle de Borda est celle qui est la plus étudiée et celle qui a fait l'objet du plus grand nombre de caractérisations axiomatiques (voir par exemple [20], [4, 5], [6], et [11]). Cependant, toutes ces axiomatisations utilisent l'axiome de consistance (et ensuite une condition discriminante pour isoler la règle de Borda), ce qui situe d'emblée la caractérisation dans la classe des RPS. La présence systématique de la condition de consistance dans tous ces résultats, nous paraît réduire la justifications théorique de la règle de Borda essentiellement à sa nature positionnelle.

Pourtant, la règle de Borda est aussi une règle de comparaison par paires. Cette double nature la situe au cœur d'une analyse originale des règles de décision, introduite par Saari [14] en 1999, fondée sur une technique de décomposition des profils. Cette approche offre des outils très puissants pour l'analyse des règles de décision, notamment dans le cas de trois candidats. Elle permet en particulier d'expliquer la plupart des paradoxes de vote, les divergences entre l'approche positionnelle et les principes majoritaires, les différences entre les résultats produits par les RPS et, surtout, le conflit entre le vainqueur de Condorcet et le vainqueur de Borda. Par ailleurs, il est intéressant de noter que la preuve donnée par Young [20] dans sa caractérisation de la règle de Borda est basée essentiellement sur une idée de décomposer les profils de manière assez voisine de celle proposée par Saari. L'étude que nous proposons dans ce papier sera consacré à l'analyse axiomatique de la règle de Borda à la lumière de cette approche. Après une brève présentation des principales caractérisations de cette méthode, nous introduisons deux propriétés de stabilité du choix collectif, déduites de la technique de décomposition des profils. Nous proposons alors une nouvelle caractérisation de la règle de Borda qui donne à cette méthode une plus large étendue axiomatique.

1 Définitions et notations

On considère un ensemble X de m candidats (ou options) avec $m \geq 2$), et un ensemble N de n votants (individus), avec $n \geq 1$. On désigne par $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des préordres complets sur X et par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des ordres linéaires sur X. Pour R dans $\mathcal{R}(X)$, on note $P(R)$ et $I(R)$ (ou simplement P et I, s'il n'y a pas de confusion possible) la composante asymétrique et la composante symétrique de R. La notation $xP(R)y$ (resp. $xI(R)y$) indique que x est strictement préféré à y (resp. que les deux options sont considérées comme équivalentes). La préférence d'un individu i dans N est représentée par un ordre linéaire p_i sur X. Pour un électorat composé de n votants, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, la donnée d'un ordre linéaire par individu définit un profil (de préférences individuelles), $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$. Un profil de taille n est donc un élément de $\mathcal{L}(X)^n$. L'ensemble de tous les profils possibles sur X lorsque la taille de la population prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{N}^*$, est l'ensemble $\mathcal{D}(X)$ défini par $\mathcal{D}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(X)^n$. Si π_1 et π_2 sont deux profils sur X correspondant à deux populations disjointes N_1 et N_2, la réunion des ces deux profils (définie comme une concaténation) sera notée $\pi_1 + \pi_2$. La notation $t\pi$ désignera le profil constitué de t répliques du profil π. Une fonction d'utilité sociale (FUS) est fonction définie sur $\mathcal{D}(X)$ à valeurs dans $\mathcal{R}(X)$. Une correspondance de choix social (CCS) est une fonction définies sur $\mathcal{D}(X)$ à valeurs dans $2^X \setminus \{\emptyset\}$ (l'ensemble des parties non vides de X).

Les règles positionnelles simples (RPS) font partie des méthodes de décision les plus étudiées en théorie du vote. Elles ont pour principe commun d'associer à chaque option un score calculé sur la base des positions qu'elle occupe dans les ordres de préférences individuelles. Plus précisement, Une RPS est définie via un vecteur score (ou vecteur points) $w = (w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ où w_r $(1 \leq r \leq m)$ est le nombre de points obtenus pour une $r^{ème}$ place. Pour un profil $\pi \in \mathcal{L}(X)^n$ et une option $x \in X$, notons $c_r(\pi, x)$ $(1 \leq r \leq m)$ le nombre de fois où x est classée $r^{ème}$ dans les ordres de préférences individuelles formant π. Le score de l'option x pour le vecteur points $w = (w_r)_{1 \leq r \leq m}$ et pour le profil π, noté $S_w(\pi, x)$, est alors défini par :

$$S_w(\pi, x) = \sum_{r=1}^{m} w_r c_r(\pi, x)$$

Définition 1.1. Une FUS f définie sur $\mathcal{D}(X)$ est une *règle positionnelle simple* s'il existe un vecteur score $w \in \mathbb{R}^m$ tel que : $\forall \pi \in \mathcal{D}(X), \forall x, y \in X, xf(\pi)y \Leftrightarrow S_w(\pi, x) \geq S_w(\pi, y)$.
Une CCS g définie sur $\mathcal{D}(X)$ est une *règle positionnelle simple* s'il existe un vecteur score $w \in \mathbb{R}^m$ tel que : $\forall \pi \in \mathcal{D}(X), \forall x \in X, x \in g(\pi) \Leftrightarrow (\forall y \in X, S_w(\pi, x) \geq S_w(\pi, y))$

Notons qu'il est toujours possible d'associer à une RPS non constante, un vecteur score normalisé, c'est-à-dire un vecteur w dans $\mathbb{R}^m$ tel que :

$$max\{w_r : 1 \leq r \leq m\} = 1 \text{ et } min\{w_r : 1 \leq r \leq m\} = 0$$

Les RPS *monotones* sont alors celles qui peuvent être représentées par un vecteur score w vérifiant :

$$w_1 = 1, w_m = 0 \text{ et } w_r \geq w_{r+1}, \forall r \in \{1, \cdots, m-1\}$$

les règles positionnelles simples les plus fréquemment utilisées sont :

- La règle de la pluralité, appelée aussi règle de la majorité simple. Elle est représentée par le vecteur :
  $w_P = (1, 0, \cdots, 0)$
- La règle de Borda, initialement associée au vecteur $(m-1, m-2, \cdots, 1, 0)$. Elle peut être représentée par le vecteur score normalisé :
  $w_B = (1, \frac{m-2}{m-1}, \cdots, \frac{m-r}{m-1}, \cdots, \frac{1}{m-1}, 0)$
- La règle de l'*antipluralité*, appelée aussi règle de la pluralité négative. Elle a pour principe de choisir les options qui obtiennent le moins de dernières places, elle est associé au vecteur score :
  $w_A = (1, \cdots, 1, 0)$

2 La règle de Borda comme méthode basée sur les comparaisons binaires

La règle de Borda peut être définie à partir du vecteur points (non normalisé) $w_{\mathcal{B}} = (m-1, \cdots, m-r, \cdots, 1, 0)$. Pour une option x_j dans X et un profil π dans $\mathcal{L}(X)^n$, notons $S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j)$ le score obtenu par x_j, en appliquant le vecteur $w_{\mathcal{B}}$. En notant $c_r(\pi, x_j)$ $(1 \leq r \leq m)$ le nombre de fois où x_j est classée $r^{ème}$ dans les ordres de préférences individuelles formant π, nous avons :

$$S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = \sum_{r=1}^{m} (m-r) c_r(\pi, x_j) \tag{2.1}$$

Ce score, qui sera appelé *score de Borda* de l'option x pour le profil π, peut s'obtenir d'une autre manière. Il suffit de remarquer que le nombre de points $(m-r)$ obtenus par l'option x_j, à chaque fois qu'elle est classé $r^{ème}$ par l'un des n individus, est égal au nombre d'options classées après x_j par cet individu. En notant $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$, il est facile de vérifier que la formule (2.1) s'écrit :

$$S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = \sum_{k \neq j} |\{i \in N : x_j p_i x_k\}| \tag{2.2}$$

Or, le terme $|\{i \in N : x_j p_i x_k\}|$ n'est rien d'autre que le coefficient $a_{jk}(\pi)$ de la matrice de surclassement $A(\pi)$, définie par $A(\pi) = (a_{jk}(\pi))_{1 \leq j,\, k \leq m}$ Le score de Borda de l'option x_j pour le profil π s'écrit alors :

$$S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = \sum_{k \neq j} a_{jk}(\pi) \tag{2.3}$$

On obtient donc le même résultat en calculant le score de Borda à partir de n'importe laquelle des trois formules (2.1), (2.2) ou (2.3). La dernière montre que la règle de Borda peut être regardée comme une méthode basée sur les comparaisons par paires. En effet si π et π' sont deux profils tels que $A(\pi) = A(\pi')$, on aura $S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = S_{\mathcal{B}}(\pi', x_j)$ pour tous les x_j dans X. Par conséquent, la règle de Borda associera le même résultat collectif à ces deux profils.

La formule (2.3) permet de remarquer l'une des situations, elle n'est pas la seule, où l'application de la règle de Borda conduit à l'égalité entre tous les candidats. Comme pour toutes les méthodes (neutres) fondées sur les comparaisons par paires, lorsque la matrice de surclassement d'un profil π est symétrique (i.e $a_{jk}(\pi) = a_{kj}(\pi)$ pour tous j, k dans $\{1, \cdots, m\}$), le résultat collectif produit par la règle de Borda n' avantage aucune option en particulier.

Notons aussi que, pour tous j, k dans $\{1, \cdots, m\}$ avec $j \neq k$, les coefficients $a_{jk}(\pi)$ et $a_{kj}(\pi)$ sont toujours liés par la relation $a_{jk}(\pi)+a_{kj}(\pi) = n$. Donc, lorsque la matrice $A(\pi)$ est symétrique, le nombre de votants est nécessairement pair et nous avons $a_{jk}(\pi) = \frac{n}{2}$ pour tous j, k dans $\{1, \cdots, m\}$ avec $j \neq k$ ($a_{jj}(\pi)$ étant, par définition, égal à 0 pour les tous les j).

Définition 2.1.

1. Une CCS g vérifie la propriété d'*annulation* si :

$$\forall \pi \in \mathcal{D}(X), (A(\pi) \text{ est symétrique}) \Rightarrow g(\pi) = X.$$

2. Une FUS f vérifie la propriété d'*annulation* si :

$$\forall \pi \in \mathcal{D}(X), (A(\pi) \text{ est symétrique}) \Rightarrow (\forall x, y \in X, xI(f(\pi))y).$$

Dans le cas particulier $m = 3$, il est possible de donner la description exacte des profils dont la matrice de surclassement est symétrique. Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 2.2. Soit L un ordre linéaire sur X. L'ordre inverse de L est l'ordre linéaire, noté $\overline{L}$, défini par : $\forall x, y \in X$, $xLy \Leftrightarrow y\overline{L}x$.
L'inverse d'un profil $\pi = (p_i)_{1\leq i\leq n}$ est le profil, noté $\overline{\pi}$, défini par : $\overline{\pi} = (\overline{p_i})_{1\leq i\leq n}$.

Par exemple, dans le cas de trois options ($X = \{A, B, C\}$), les inverses de six ordres linéaires

$$\begin{array}{ll} (L_1)\ A \succ B \succ C & (L_4)\ B \succ C \succ A \\ (L_2)\ A \succ C \succ B & (L_5)\ C \succ A \succ B \\ (L_3)\ B \succ A \succ C & (L_6)\ C \succ B \succ A \end{array}$$

sont donnés par les relations $\overline{L_1} = L_6$, $\overline{L_2} = L_4$ et $\overline{L_3} = L_5$.

Proposition 2.1. *Pour $m = 3$, la matrice de surclassement d'un profil (anonyme) π est symétrique si et seulement si $\overline{\pi} = \pi$.*

Preuve. Soit $\pi = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$. Pour simplifier la notation, posons $x_1 = A$, $x_2 = B$ et $x_3 = C$. Nous avons :

$$\begin{array}{ll} a_{1,2}(\pi) = n_1 + n_2 + n_5 & a_{2,1}(\pi) = n_3 + n_4 + n_6 \\ a_{1,3}(\pi) = n_1 + n_2 + n_3 & a_{3,1}(\pi) = n_4 + n_5 + n_6 \\ a_{2,3}(\pi) = n_1 + n_3 + n_4 & a_{3,2}(\pi) = n_2 + n_5 + n_6 \end{array}$$
$$a_{1,1}(\pi) = a_{2,2}(\pi) = a_{3,3}(\pi) = 0$$

Si $\overline{\pi} = \pi$, on a $n_1 = n_6$, $n_2 = n_4$ et $n_3 = n_5$. On vérifie alors facilement que $A(\pi)$ est symétrique.
Dans l'autre sens, si $A(\pi)$ est symétrique, nous avons déjà noté que n doit être pair et que tous les coefficients, autres que ceux de la diagonale, sont égaux à $\frac{n}{2}$. Tous ces coefficients sont donc égaux. En particulier, nous avons $a_{1,2}(\pi) = a_{1,3}(\pi)$, $a_{1,3}(\pi) = a_{2,3}(\pi)$ et $=$ $a_{1,2}(\pi) = a_{3,2}(\pi)$. Soit :

$$n_1 + n_2 + n_5 = n_1 + n_2 + n_3 \quad (1)$$
$$n_1 + n_2 + n_3 = n_1 + n_3 + n_4 \quad (2)$$
$$n_1 + n_2 + n_5 = n_2 + n_5 + n_6 \quad (3)$$

Par (1), on obtient $n_3 = n_5$. Par (2), $n_2 = n_4$. Et par (3), $n_1 = n_6$. Ce qui montre que $\overline{\pi} = \pi$. $\square$

Le résultat de cette proposition n'est pas généralisable au cas $m \geq 4$. L'exemple suivant montre que dans ce cas, il existe des profils π tels que $A(\pi)$ est symétrique et $\overline{\pi} \neq \pi$.

Exemple 2.1. Pour $m = 4$ et $X = \{A, B, C, D\}$, considérons le profil suivant :

$$\pi : \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & D & C & B \\ B & C & D & A \\ C & A & B & D \\ D & B & A & C \end{array}$$

La matrice de surclassement de π est symétrique. En effet, tous les coefficients, autres que ceux de la diagonale, sont égaux à 2. Pourtant, $\overline{\pi} \neq \pi$. On vérifie, par exemple, que l'ordre $D \succ C \succ B \succ A$ (qui est l'inverse de l'ordre $A \succ B \succ C \succ D$) ne figure pas dans π.

Cette distinction entre le cas de trois options et celui où il y quatre options ou plus sera importante, dans la dernière partie de cette étude, pour le choix des conditions que nous utiliserons dans notre caractérisation de la règle de Borda.

3 Les caractérisations axiomatiques de la méthode de Borda

La caractérisation axiomatique des RPS, en tant que classe de méthodes d'agrégation, est due à Smith [19] (1973) et à Young [21, 22] (1974, 1975). Cette axiomatisation fait appel à la notion de consistance introduite par ces deux mêmes auteurs au milieu des années 1970. Cette propriété exprime l'idée suivante : supposons que deux groupes distincts de votants doivent, avec la même règle de décision collective appliquée à un même ensemble de candidats, choisir un sous-ensemble de vainqueurs (le cas d'une CCS). La condition de consistance exige alors que si un candidat est dans l'ensemble de choix pour chaque groupe de votants, alors il doit rester dans l'ensemble de choix lorsque les deux groupes sont réunis. Cette condition s'étend aussi aux FUS, on parle alors de séparabilité. L'idée est que si l'option x est collectivement considérée comme au moins aussi bonne que l'option y par deux groupes distincts de votants, alors cette opinion doit être aussi celle de la réunion des deux groupes. Si de plus l'un des groupes préfère strictement x à y, la réunion des deux groupes doit aussi préférer strictement x à y.

Définition 3.1. Une CCS g est *consistante* si pour tous profils π, π' dans $\mathcal{D}(X)$, $g(\pi) \cap g(\pi') \neq \emptyset \Rightarrow g(\pi + \pi') = g(\pi) \cap g(\pi')$.
Une FUS f est *séparable* si pour tous π, π' dans $\mathcal{D}(X)$ et pour tous x, y dans X,

1. $(xf(\pi)y$ et $xf(\pi')y) \Rightarrow xf(\pi + \pi')y$
2. $(xf(\pi)y$ et $xP(f(\pi'))y) \Rightarrow xP(f(\pi + \pi'))y$

En plus de la condition de consistance (ou de séparabilité) qui constitue la propriété de base dans la caractérisation des RPS, et des deux conditions minimales d'anonymat et de neutralité, Smith et Young utilisent la propriété suivante.

Définition 3.2. Une FUS f est *archimédienne* si,
pour tout profil π, pour tous x, y dans X tels que $xP(f(\pi))y$ et pour tout profil π', il existe un entier naturel n_0 tel que : $n > n_0 \Rightarrow xP(f(n\pi + \pi'))y$.
Une CSS f est *continue* si,
pour tout profil π, pour tout x dans X tel que $x \in g(\pi)$ et pour tout profil π', il existe un entier naturel n_0 tel que : $n > n_0 \Rightarrow x \in g(n\pi + \pi')$.

Les théorèmes de Smith et de Young peuvent alors s'énoncer comme suit.

Thèoreme 3.1 (Smith [19]). *Une FUS est neutre, anonyme, séparable et archimédienne si et seulement si c'est une règle positionnelle simple.*

Thèoreme 3.2 (Young [22]). *Une CCS est neutre, anonyme, consistante et continue si et seulement si c'est une règle positionnelle simple.*

La première caractérisation de la méthode de Borda a été proposée par Young [20] en 1974 [1]. Dans ce résultat, la méthode de Borda est considérée comme une correspondance de choix social. En plus des conditions de neutralité, consistance et annulation, Young utilise la propriété décrite dans la première partie de la définition suivante.

Définition 3.3.

1. Une CCS g est *loyale* si :

$$\forall L \in \mathcal{L}(X), \forall x \in X, (xP(L)y, \forall y \in X \setminus \{x\}) \Rightarrow g(L) = \{x\}.$$

2. Une FUS f est *loyale* si :

$$\forall L \in \mathcal{L}(X), f(L) = L.$$

En d'autres termes, s'il n'y a qu'un seul votant, la CCS (resp. la FUS) doit choisir, comme résultat collectif, l'option classée première par ce votant (resp. restituer, en résultat collectif, l'ordre de préférence de ce votant).

Thèoreme 3.3 (Young, [20]). *La méthode de Borda est la seule correspondance de choix social qui vérifie les conditions de neutralité, consistance, annulation et loyauté .*

1. Cette même année, une autre caractérisation de la méthode de Borda a été obtenue par Fine et Fine [4, 5].

Ce théorème peut se démontrer de plusieurs façons. La preuve donnée par Young est basée essentiellement sur une technique originale de décomposition des profils. Il est intéressant de noter que cette décomposition est assez voisine de celle proposée récemment par Saari et qui fera l'objet de la section suivante. Le théorème 3.3 peut aussi s'obtenir comme corollaire du théorème de Young (ou celui de Smith) qui caractérise la classe des RPS. Il suffit, en effet, de commencer par établir la condition d'anonymat (comme conséquence de la conjonction des conditions de consistance et d'annulation). Les trois conditions d'anonymat, neutralité et consistance situent alors la caractérisation dans la famille des règles positionnelles (simples ou composées), et les propriétés d'annulation et de loyauté permettent alors d'isoler la règle de Borda. Pour finir, notons qu'il existe une preuve purement combinatoire du théorème 3.3, elle a été proposée par Hanson et Sahlquist [7].

En 1981, Nitzan et Rubinstein [11] ont proposé une caractérisation de la méthode de Borda comme fonction d'utilité sociale. Pour présenter ce résultat, nous avons besoin d'introduire la condition de *monotonie stricte*.
Cette propriété peut être formulée comme suit : pour deux options x, y dans X ($x \neq y$) et un profil $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{D}(X)$, notons $T_{xy}(\pi)$ l'ensemble des profils obtenus à partir de π en changeant la préférence d'un seul votant en faveur de x et en défaveur de y : un profil $\pi' = (p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dans $T_{xy}(\pi)$ s'il existe un individu $j \in N$ tel que $y p_j x$, $x p'_j y$, $p_i = p'_i$ pour $i \neq j$ et les restrictions de p_j et p'_j à $X \setminus \{x\}$ sont égales. Notons aussi T_x l'ensemble défini par :

$$T_x = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} T_{xy}(\pi)$$

Définition 3.4.

1. Une FUS f est *strictement monotone* si, pour tous x, y dans X et pour tous profils π et π' dans $\mathcal{D}(X)$ tels que $\pi' \in T_{xy}(\pi)$, $x f(\pi) y \Rightarrow x P(f(\pi')) y$.
2. Une CCS est *strictement monotone* si, pour tout x dans X et pour tous profils π et π' dans $\mathcal{D}(X)$ tels que $\pi' \in T_x(\pi)$, $x \in g(\pi) \Rightarrow \{x\} = g(\pi')$.

Cette définition correspond à la version forte de la propriété de monotonie.

Définition 3.5.

1. Une fonction d'utilité sociale f est *monotone* si, pour tous x, y dans X et pour tous profils π et π' dans $\mathcal{D}(X)$ tels que $\pi' \in T_{xy}(\pi)$, $x f(\pi) y \Rightarrow x(f(\pi')) y$.
2. Une correspondance de choix social est *monotone* si, pour tout x dans X et pour tous profils π et π' dans $\mathcal{D}(X)$ tels que $\pi' \in T_x(\pi)$, $x \in g(\pi) \Rightarrow x \in g(\pi')$.

Le résultat de Nitzan et Rubinstein utilise, outre la condition de monotonie stricte (première partie de la définition 3.4), les condition de neutralité, séparabilité (qui représente l'équivalent de la consistance pour les CCS) et annulation (deuxième partie de la définition 2.1).

Thèoreme 3.4 (**Nitzan et Rubinstein, [11]**). *La règle de Borda est la seule fonction d'utilité sociale qui vérifie les conditions de neutralité, séparabilité, annulation et monotonie stricte.*

Notons aussi que de nombreuses caractérisations de la règle de Borda ont été obtenues en étendant cette règle à différents contextes où les préférences individuelles sont modélisées par toutes sorte de relations binaires (Debord [3], Bouyssou [1], Marchant[8, 9]).

Dans la bibliographie que nous avons consultée, l'une des rares caractérisations de la méthode de Borda (dans un cadre formel analogue à celui que nous avons retenu) qui n'utilise pas un axiome de renforcement (consistance, séparabilité) est assez récente (octobre 2000), elle figure dans la thèse de Ould-Ali [12]. Ce résultat utilise, à la place de l'axiome de consistance, une propriété dite de stabilité circulaire, notion proche des deux nouvelles conditions que nous introduirons plus loin dans ce document. Ould-Ali utilise aussi la propriété de monotonie stricte [2], nous nous limiterons à une version minimale de cette condition.

4 La décomposition des profils

Dans les années 1999 et 2000, Saari [14, 15, 16] a développé une analyse mathématique des règles de décision, basée sur une nouvelle technique qui permet de décomposer chaque profil de préférences individuelles en en quatre composantes (ou portions) :

- Une composante *neutre* qui n'affecte ni les résultats collectifs produits par les RPS ni ceux produits par les règles basées sur les comparaisons par paires : la suppression de cette portion ne change pas ces résultats.
- Une composante *de base* pour laquelle toutes les méthodes (RPS et comparaisons par paires) donnent le même résultat collectif.
- Une composante dite *Condorcet* qui n'a aucun impact sur les RPS et qui affecte les résultats de toutes les règles basées sur les comparaisons par paires, à l'exception de la méthode de Borda.
- Une composante *inversible* qui n'a aucun impact sur les comparaisons par paires et qui, dans le cas $m = 3$, affecte les résultats de toutes les RPS, à l'exception de la méthode de Borda. Dans le cas général, la règle de Borda est l'une des (rares) règles positionnelles simples dont le résultat n'est pas perturbé par cette portion.

Pour simplifier la présentation de cette nouvelle approche, nous nous limiterons au cas $m = 3$. La description exacte des éléments de la décomposition, dans le cas $m \geq 4$, est plus complexe et alourdirait inutilement le contenu de la partie suivante.

4.1 Les éléments de la décomposition

Toutes les règles de décision, considérées dans cette sous-section et dans celle qui suit, sont définies sur un ensemble de trois options, $X = \{A, B, C\}$. Comme il est souvent le cas dans les travaux de Saari, ces règles sont supposées anonymes et homogènes. Nous ne ferons donc pas de distinction entre un profil (anonyme) et celui obtenu en multipliant ce profil par un entier positif (ou même par une fraction positive).

Définition 4.1. Un profil *neutre* est un profil pour lequel toutes les RPS et toutes les règles basées sur les comparaisons par paires produisent, comme résultat collectif, l'égalité entre tous les candidats.

2. Ould-Ali emploie la définition de la monotonie stricte habituellement utilisée en théorie d'aide à la décision multicritère. Cette version impose dans la définition de T_x, en plus des conditions décrites plus haut, que l'option x soit classée juste derrière l'option y dans p_j et juste devant y dans p'_j.

Le profil neutre le plus simple est le profil **K** défini par $\mathbf{K} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Il correspond à une situation impliquant 6 votants où chacun des 6 ordres linéaires possibles est choisi par un et un seul votant :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & A & B & B & C & C \\ B & C & A & C & A & B \\ C & B & C & A & B & A \end{array}$$

Il est facile de voir que toutes les permutations sur X laissent invariant ce profil. Par conséquent, toutes les méthodes basées sur les comparaisons par paires et toutes les RPS (et plus généralement toutes les règles neutres) produisent le même résultat collectif sur ce profil : l'égalité entre tous les candidats. Cette conclusion vaut aussi pour les multiples $\alpha\mathbf{K}$ du profil **K**. En outre, ce type de profils n'a pas d'effet sur les résultats produits par les RPS ou par les comparaisons par paires : on ne change pas les résultats collectifs que ces règles associent à un profil π si un multiple de **K** est ajouté à π ou supprimé de π.
Saari [15] montre que, dans le cas particulier $m = 3$, les multiples de **K** sont les seuls profils à vérifier de telles propriétés [3].

Les trois autres composantes ne sont pas des profils dans le sens strict du terme : ils correspondent plutôt à des différences entre deux situations de vote. Ce type de configurations a été introduit par Saari [14, 15] pour simplifier les opérations d'addition et de soustraction de profils, nécessaires à son analyse.

Définition 4.2. Un profil *différentiel* sur X est un vecteur de $\mathbb{Z}^6$, défini par la différence entre deux vecteurs représentant deux situations de vote de même taille.

Un profil différentiel comporte donc des valeurs négatives et la somme de ses composantes est égale à zéro. L' application des RPS et des comparaisons par paires à ce type de profils ne pose cependant aucun problème : les notions de scores et de duels majoritaires peuvent être étendues aux situations de vote comportant des nombres (de votants) négatifs. En ajoutant un multiple $\alpha\mathbf{K}$ (avec α suffisamment grand) à un profil différentiel, on obtient un profil dont toutes les composantes sont positives et qui correspond au même résultat collectif. Par exemple, une RPS ou une règle basée sur les comparaisons par paires associe le même résultat au profil différentiel $\delta = (-4, 1, 1, -3, 4, 0)$ et au profil $\delta + 4\mathbf{K}^3 = (0, 5, 5, 1, 8, 4)$.

Définition 4.3. Le profil différentiel *de base* pour le candidat x ($x \in X$), noté $\mathbf{B}^x = (\mathbf{b}_j^x)_{1 \leq j \leq 6}$, est le profil différentiel défini par : $\mathbf{b}_j^x = 1$ si x est classé premier dans L_j, $\mathbf{b}_j^x = -1$ si x est classé dernier dans L_j, et $\mathbf{b}_j^x = 0$ sinon. Un profil différentiel de base est une combinaison linéaire de tels profils.

Les trois profils différentiels de base sont définis respectivement par les vecteurs $(1, 1, 0, -1, 0, -1)$,

3. Dans [15], Saari montre que pour $m \geq 4$, il existe des profils neutres qui ont une structure plus complexe que celle des $\alpha\mathbf{K}$. Il donne aussi une description complète de l'espace des profils neutres pour $m = 4$, ce résultat n'est cependant pas généralisable au cas $m > 5$.

$(0, -1, 1, 1, -1, 0)$ et $(-1, 0, -1, -0, 1, 1)$. Ils représentent les trois situations suivantes :

$$\mathbf{B}^A : \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ A & A & B & C \\ B & C & C & B \\ C & B & A & A \end{array} \qquad \mathbf{B}^B : \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ B & B & A & C \\ A & C & C & A \\ C & A & B & B \end{array} \qquad \mathbf{B}^C : \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ C & C & A & B \\ A & B & B & A \\ B & A & C & C \end{array}$$

Ces vecteurs sont deux à deux indépendants et leur somme est égale aux vecteur nul. Il s'en suit que tous profil différentiel de base peut s'écrire comme combinaison linéaire de seulement deux de ces trois vecteurs.

Définition 4.4. Le profil différentiel *Condorcet* associé à un ordre linéaire $L = x_1 \succ x_2 \succ x_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in X)$ est le profil différentiel $\mathbf{C}^L = (\mathbf{c}_j^L)_{1 \leq j \leq 6}$, défini par : $\mathbf{c}_j^L = 1$ si L_j est l'un des trois ordres linéaires $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, $x_2 \succ x_3 \succ x_1$, $x_3 \succ x_1 \succ x_2$ et $\mathbf{c}_j^L = 0$ sinon. Un profil différentiel Condorcet est une combinaison linéaire de tels profils.

Avec la numérotation des 6 ordres linéaires sur X, décrite plus haut, nous avons :

$$\mathbf{C}^{L_1} = \mathbf{C}^{L_4} = \mathbf{C}^{L_5} = (1, -1, -1, 1, 1, -1)$$
$$\mathbf{C}^{L_2} = \mathbf{C}^{L_3} = \mathbf{C}^{L_6} = (-1, 1, 1, -1, -1, 1)$$

Le deuxième vecteur est l'opposé du premier vecteur. Par conséquent, tous les profils différentiels Condorcet sont des multiples (éventuellement négatifs) du profil différentiel suivant :

$$\mathbf{C} : \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ A & B & C & A & C & B \\ B & C & A & C & B & A \\ C & A & B & B & A & C \end{array}$$

Définition 4.5. Le profil différentiel *d'inversion* pour le candidat x, noté $\mathbf{R}^x = \mathbf{r}_j^x)_{1 \leq j \leq 6}$, est le profil différentiel défini par : $\mathbf{r}_j^x = 1$ si x est classé premier dans L_j, $\mathbf{r}_j^x = 1$ si x est classé dernier dans L_j, et $\mathbf{r}_j^x = -2$ sinon. Un profil différentiel d'inversion est une combinaison linéaire de tels profils.

Les profils différentiels d'inversion pour les candidats A, B et C sont décrits par les trois vecteurs suivants :

$$\mathbf{R}^A = (1, 1, -2, 1, -2, 1)$$
$$\mathbf{R}^B = (-2, 1, 1, 1, 1, -2)$$
$$\mathbf{R}^C = (1, -2, 1, -2, 1, 1)$$

Ces vecteurs sont deux à deux indépendants et leur somme est égale aux vecteur nul. Il s'en suit que tout profil différentiel d'inversion peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux de ces trois vecteurs.

4.2 L'impact de la décomposition

Le théorème suivant est un outil très puissant pour l'analyse des règles de décision dans le cas de trois candidats. Il permet, en particulier, d'expliquer la plupart des paradoxes de vote, les divergences entre l'approche positionnelle et les principes majoritaires, les différences entre les résultats produits par les RPS et, surtout, le conflit entre le vainqueur de Condorcet et celui de Borda.

Thèoreme 4.1 (**Saari, [14]**). *Tout profil π peut s'écrire sous la forme :*

$$\pi = \pi_{\boldsymbol{K}} + \pi_{\boldsymbol{B}} + \pi_{\boldsymbol{C}} + \pi_{\boldsymbol{R}}$$

où $\pi_{\boldsymbol{K}}$, $\pi_{\boldsymbol{B}}$, $\pi_{\boldsymbol{C}}$ et $\pi_{\boldsymbol{R}}$ sont des profils différentiels respectivement neutre, de base, Condorcet et d'inversion.

Avec la décomposition décrite par ce théorème, il devient possible d'isoler et d'analyser l'impact de chacune des quatre composantes sur le résultat collectif. Des calculs élémentaires permettent d'établir les assertions contenues dans la remarque suivante :

Remarque 4.1.

1. Toutes les RPS et les méthodes basées sur les comparaisons binaires produisent le même résultat, l'égalité entre les trois candidats, lorsqu'elles sont appliquées à la composante neutre $\pi_{\mathbf{K}}$ ($\pi_{\mathbf{K}}$ est un multiple de $\mathbf{K}$).
2. Toutes les RPS (utilisant un vecteur normalisé) donnent le même résultat sur la composante de base $\pi_{\mathbf{B}}$. Soit $\pi_{\mathbf{B}} = \alpha\mathbf{B}^A + \beta\mathbf{B}^B + \mathbf{B}^C$. Pour chaque candidat, toutes les RPS associent le même score. Pour les trois candidats A, B et C, les scores sont respectivement :

$$2\alpha - \beta - \gamma, \quad 2\beta - \alpha - \gamma, \quad 2\gamma - \alpha - \beta$$

   Les résultats des comparaisons par paires sur cette composante permettent un classement transitif des trois candidats. Ce classement est le même que le classement commun donné par les RPS. Les résultats chiffrés des duels majoritaires sont :

$$\begin{aligned} 2(\alpha-\beta) \text{ pour } A \succ B \text{ et } 2(\beta-\alpha) \text{ pour } B \succ A \\ 2(\beta-\gamma) \text{ pour } B \succ C \text{ et } 2(\gamma-\beta) \text{ pour } C \succ B \\ 2(\alpha-\gamma) \text{ pour } A \succ C \text{ et } 2(\gamma-\alpha) \text{ pour } C \succ A \end{aligned}$$

3. Toutes les RPS produisent une égalité entre les trois candidats sur la composante Condorcet (tous les scores sont nuls). En revanche, les comparaisons binaires sur cette composante conduisent à une préférence collective cyclique. Si $\pi_{\mathbf{C}} = \eta\mathbf{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \eta \text{ pour } A \succ B \text{ et } -\eta \text{ pour } B \succ A \\ \eta \text{ pour } B \succ C \text{ et } -\eta \text{ pour } C \succ B \\ -\eta \text{ pour } A \succ C \text{ et } \eta \text{ pour } C \succ A \end{aligned}$$

4. Les comparaisons par paires, appliquées appliquées à la composante d'inversion $\pi_{\mathbf{R}}$, conduisent à une égalité entre les trois candidats : les résultats chiffrés des duels majoritaires sont tous nuls. Si $\pi_{\mathbf{R}} = \alpha'\mathbf{R}^A + \beta'\mathbf{R}^B + \gamma'\mathbf{R}^C$ et si $(1, \lambda, 0)$ $(1 \leq \lambda \leq 0)$ est un vecteur score normalisé, les scores des trois candidats sont les suivants :

$$\begin{aligned} S_\lambda(\pi_{\mathbf{R}}, A) =& (1-2\lambda)(2\alpha' - \beta' - \gamma') \\ S_\lambda(\pi_{\mathbf{R}}, B) =& (1-2\lambda)(2\beta' - \alpha' - \gamma') \\ S_\lambda(\pi_{\mathbf{R}}, C) =& (1-2\lambda)(2\gamma' - \alpha' - \beta') \end{aligned}$$

   En particulier, la règle de Borda est la seule RPS qui conduit à l'égalité entre les trois candidats pour toutes les valeurs possibles de α', β' et γ'.

Cette description de tous les résultats possibles que les RPS et les comparaisons par par paires peuvent engendrer sur chacune des quatre composantes a permis à Saari d'identifier deux sources principales responsables de tous les conflits entre les différentes règles de décision(voir [14] pour le cas $m = 3$, [15] et [16] pour le cas $m \geq 4$) :

1. La composante Condorcet est à l'origine de toutes les différences entre les classements produits par la règle de Borda et ceux déduits des comparaisons par paires. Cette composante n'a aucun impact sur les résultats de la règle de Borda. En revanche, elle peut altérer les classements déduits des duels majoritaires.
2. Lorsqu'un profil n'a pas de composante Condorcet, le résultat de la règle de Borda coïncide avec celui déduit des comparaisons par paires.
3. La composante Condorcet est responsable de toutes les différences qui peuvent exister entre les résultats produits par les différentes règles basées sur les comparaisons par paires. En revanche, elle est sans effet sur les résultats des RPS.
4. La composante d'inversion n'a pas d'impact sur les résultats produits par les règles basées sur les comparaisons binaires. En particulier, elle ne modifie pas le classement obtenu par l'application de la règle de Borda.
5. La composante d'inversion est la source de toutes les divergences entre les différentes RPS.

Exemple 4.1 (Analyse de l'exemple de Condorcet). Il est possible de donner une explication de cet exemple, en utilisant les matrices de surclassement et les matrices des positions. L'interprétation que nous présentons ici est due à Saari [14], elle repose sur les techniques de décomposition des profils. Reprenons donc le profil exhibé par Condorcet pour disqualifier toutes les règles positionnelles simples, en montrant qu'aucune de ces règles ne permet de choisir le VC :

$$\pi : \quad \begin{array}{cccccc} 30 & 1 & 29 & 10 & 10 & 1 \\ A & A & B & B & C & C \\ B & C & A & c & A & B \\ C & B & C & A & B & A \end{array}$$

D'après le théorème 4.1, ce profil se décompose de la manière suivante :

$$\pi = \alpha\mathbf{B}^A + \beta\mathbf{B}^B + \gamma\mathbf{B}^C + \alpha'\mathbf{R}^A + \beta'\mathbf{R}^B + \gamma'\mathbf{R}^C + +\eta\,\mathbf{C} + \kappa\mathbf{K} \tag{1}$$

En passant à la représentation vectorielle du profil π ($\pi = (30, 1, 29, 10, 10, 1)$) et des profils différentiels qui interviennent dans cette équation, nous obtenons un système linéaire à 6 équation et 8 inconnues. Nous avons déjà noté que la composante de base peut s'exprimer comme combinaison linéaire de seulement deux des trois vecteurs représentant les profils différentiels de base associés à chaque candidats (par exemple $\mathbf{B}^A$ et $\mathbf{B}^B$). De la même façon, la composante d'inversion peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathbf{B}^A$ et $\mathbf{B}^B$. L'équation (1) se réduit alors à :

$$\pi = \alpha\mathbf{B}^A + \beta\mathbf{B}^B + \alpha'\mathbf{R}^A + \beta'\mathbf{R}^B + \eta\mathbf{C} + \kappa\mathbf{K} \tag{2}$$

On vérifie que la solution de ce système linéaire à 6 équations et 6 inconnues est donnée par [4] :

$$\alpha = \frac{68}{6}, \beta = \frac{76}{6}, \alpha' = \frac{-28}{6}, \beta' = \frac{-20}{6}, \eta = \frac{19}{6}, \kappa = \frac{81}{6}$$

Pour éviter l'utilisation des profils factionnaires, on peut multiplier les deux membres de l'équation (2) par 6 (les RPS étant homogènes et le V.C étant stable par duplication de profils) et obtenir :

$$6\pi = 68\mathbf{B}^A + 76\mathbf{B}^B - 28\mathbf{R}^A - 20\mathbf{R}^B + 19\mathbf{C} + 81\mathbf{K}$$

En utilisant la remarque 4.1, pour les calcul des scores et des résultats des comparaisons binaires, on obtient :

- Sur la composante de base, les scores des candidats A, B et C par n'importe quelle RPS sont respectivement 60, 84 et -144. Les résultats des duels majoritaires sont :

$$\begin{aligned} -16 &\text{ pour } A \succ B \text{ contre } 16 \text{ pour } B \succ A \\ 136 &\text{ pour } B \succ C \text{ contre } -136 \text{ pour } C \succ B \\ 156 &\text{ pour } A \succ C \text{ contre } -156 \text{ pour } C \succ A \end{aligned}$$

- Sur la composante d'inversion, les résultats des duels majoritaires sont tous nuls. Les scores des trois candidats par la RPS utilisant le vecteur score $(1, \lambda, 0)$ sont :

$$\begin{aligned} &-36(1-2\lambda) \text{ pour } A \\ &-12(1-2\lambda) \text{ pour } B \\ &48(1-2\lambda) \text{ pour } C \end{aligned}$$

- Sur la composante Condorcet, les scores attribuées aux trois candidats par les différentes RPS sont tous nuls. Les comparaisons binaires donnent :

$$\begin{aligned} 19 &\text{ pour } A \succ B \text{ contre } -19 \text{ pour } B \succ A \\ 19 &\text{ pour } B \succ C \text{ contre } -19 \text{ pour } C \succ B \\ -19 &\text{ pour } A \succ C \text{ contre } 19 \text{ pour } C \succ A \end{aligned}$$

La composante neutre n'ayant aucun impact sur ces résultats, nous pouvons l'ignorer et limiter l'analyse aux trois autres éléments de la décomposition :

4. Pour les détails de calculs dans cet exemple et pour les techniques de décomposition des profils en général, voir [14, 15, 16].

1. Sur la composante de base, toutes les RPS donne le même résultat collectif : $B \succ A \succ C$. Ce classement est aussi celui déduit des comparaisons par paires. Le candidat B est donc le V.C pour cette composante.
2. La composante d'inversion ne change pas le résultat, obtenu sur la composante de base, pour les comparaisons binaires et pour la règle de Borda. En dehors de l'antipluralité, dont le résultat devient $A \sim B \succ C$, l'impact de cette composante est, dans ce cas, trop faible pour altérer les classements produits par les RPS autres que la règle de Borda. Le candidat B est toujours le V.C et il est toujours choisi, comme unique gagnant, par toute les RPS à l'exception de la règle de l'antipluralité qui lui associe le Candidat A.
3. Le vrai impact est celui de la composante Condorcet. Cette portion, qui ne modifie pas les résultats des RPS, devrait correspondre à une égalité entre les trois candidats, en raison de sa structure parfaitement symétrique. Pourtant, elle altère les résultat des duels majoritaires et provoque une déviation du choix de l'option majoritaire de B vers A.

Pour Saari, le candidat B est le vrai vainqueur de Condorcet pour le profil π car il est le vainqueur du vrai profil (la composante de base), la composante d'inversion et surtout la composante de Condorcet n'étant, selon lui, que des biais qui altèrent le résultat collectif et que toute règle raisonnable doit ignorer. Il conclut que l'exemple de Condorcet, loin de disqualifier les RPS et en particulier la règle de Borda, met en évidence la faiblesse du principe majoritaire en montrant sa susceptibilité à être affecté par des composantes non pertinentes des profils de préférences.

La démarche adoptée dans l'exemple précèdent permet d'expliquer la plupart des paradoxes de vote (à titre d'exemple, voir [14] pour une explication du paradoxe de Borda), comparer les résultats des différentes règles (voir [13] pour une comparaison entre la méthode de Dogdson et celle de Borda) ou encore obtenir une nouvelle interprétation des résultats d'impossibilité ([15] pour une analyse du théorème d'Arrow).

4.3 La stabilité par rapport aux profils symétriques

La définition de profil différentiel, introduite dans la section précédente, incluait des nombres (de votants) négatifs. Cependant, nous avons noté que cette notion avait surtout un intérêt technique et qu'il était toujours possible (en ajoutant des profils neutres) de se ramener à des situations avec des nombres (de votants) positifs. Les profils que nous considérons dans toute la suite, sont des profils (classiques) définis comme des éléments de $\mathcal{D}(X)$ avec $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. Nous commençons par étendre les notions de profil Condorcet et de profil d'inversion au cas d'un nombre quelconque d'options. Dans cette généralisation, nous ne retenons que les parties qui correspondent à des nombres (de votants) positifs. Dans toute la suite, nous n'aurons pas besoin de généraliser la notion de profil neutre, plus complexe dans le cas $m \geq 4$. La généralisation des profils de base sera présentée plus loin dans cette partie.

Définition 4.6. Soit L un ordre linéaire sur X.

1. Le *profil Condorcet* (ou cycle) associé à L, noté $\mathbf{C}^L$, est le profil formé des m ordres linéaires $L_1 = L, L_2, \cdots, L_m$ où chacun des ordres suivant le premier est obtenu à partir de son prédécesseur en rangeant l'option classée dernière à la première place.
2. Le *profil d'inversion* associé à L, noté $\mathbf{R}^L$, est le profil formé par L et par son inverse $\overline{L}$.

Exemple 4.2. Pour $m = 3$, $X = \{x, y, z\}$, nous avons deux cycles. Ils correspondent aux deux ordres $L_1 = x \succ y \succ z$ et $L_2 = x \succ z \succ y$:

$$\mathbf{C}^{L_1} : \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{array} \qquad \mathbf{C}^{L_2} : \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ z & y & x \\ y & z & x \end{array}$$

Nous avons aussi trois profils d'inversions. Ils correspondent aux trois ordres $L_1 = x \succ y \succ z$, $L_2 = x \succ z \succ y$ et $L_3 = y \succ x \succ z$:

$$\mathbf{R}^{L_1} : \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x & z \\ y & y \\ z & x \end{array} \qquad \mathbf{R}^{L_2} : \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x & y \\ z & z \\ y & x \end{array} \qquad \mathbf{R}^{L_3} : \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ y & z \\ x & x \\ z & y \end{array}$$

Les profils Condorcet et les profils d'inversions présentent deux types de symétries qui, d'après Saari, doivent être prises en considération par toute méthode d'agrégation raisonnable. Il introduit alors deux conditions (baptisées (NCR) et (NRR))[5] qui exigent la neutralité de la méthode d'agrégation envers ce genre de profils symétriques :

- Dans un profil Condorcet, chaque candidat occupe une et une seule fois chacune des m positions possibles : $1^{ère}$, $2^{ème}$, $\cdots$ et $m^{ème}$. Par conséquent, cette configuration ne favorise aucun candidat en particulier. La condition (NCR) indique que cette situation doit correspondre à une égalité entre tous les candidats.
- Un profil d'inversion est constitué d'un ordre linéaire et de son inverse. Pour chaque paire de candidats $\{x, y\}$, un seul votant préfère x à y et un seul votant préfère y à x. Aucun candidat n'est donc favorisé par cette configuration. La condition (NRR) exige que cette situation soit associée à une égalité entre tous les candidats.

Présentés de cette manière, ces deux principes ont un intérêt assez limité. En effet, la condition (NCR) s'obtient comme conséquence de l'axiome de neutralité et la condition (NRR) est une version faible de la propriété d'annulation. En réalité, Saari demande que ces deux propriétés soient appliquées respectivement à la composante Condorcet et à la composante d'inversion de chaque profil. Pour lui, le « vrai » résultat collectif est celui obtenu sur la composante de base. De la même façon que pour la partie neutre, la composante Condorcet et la composante d'inversion (qu'il qualifie de profils de déviation), doivent être ignorées par toute méthode d'agrégation raisonnable (voir par exemple [14], p.343 et p.346). Cette exigence de restreindre le résultat collectif à celui de la composante de base est décrite par les deux propriétés de stabilité suivantes :

5. Abréviations des expressions "*Neutral Condorcet Requirment*" et "*Neutral Reversal Requirment*" (voir [17, 18]).

Définition 4.7. 1. Une méthode d'agrégation F vérifie la condition de stabilité par rapport aux profils Condorcet (SPC) si, pour tout profil π et pour tout ordre linéaire L, $F(\pi + \mathbf{C}^L) = F(\pi)$.

2. Une méthode d'agrégation F vérifie la condition de stabilité par rapport aux profils d'inversion (SPI) si, pour tout profil π et pour tout ordre linéaire L, $F(\pi + \mathbf{R}^L) = F(\pi)$.

La propriété (SPI) est une version faible d'une condition connue, en théorie de l'aide à la décision multicritère, sous le nom de *nulle stabilité* [6].

Définition 4.8. Une méthode d'agrégation F est *nulle stable* (NS) si, pour tous profils π et I, ($A(I)$ est symétrique) $\Rightarrow F(\pi + I) = F(\pi)$.

Lorsqu'il n'y a que trois options, nous savons (par la proposition 2.1) que les profils composés d'un ou plusieurs profils d'inversion sont les seuls à avoir des matrices de surclassent symétriques. Par conséquent les conditions (NS) et (SPI) sont équivalentes dans le cas particulier $m = 3$. L'exemple 2.1 montre que ces deux propriétés sont différentes pour $m \geq 4$.

5 Proposition d'une nouvelle caractérisation de la règle de Borda

De notre côté, nous proposons, dans ce qui suit, une étude axiomatique de la règle de Borda à la lumière de cette nouvelle approche. Dans le cas de trois options, les deux conditions (SPC) et (SPI) permettent de distinguer la règle de Borda de toutes les règles positionnelles simples et de toutes les règles basées sur les comparaisons par paires. Naturellement, il faut ajouter à ces propriétés une autre condition (par exemple, un certain degré de monotonie) pour exclure des règles non utilisables (qui vérifient les conditions (A), (N) , (SPC) et (SPI)) comme par exemple la RPS définie par l'opposé du vecteur score de la règle de Borda. En considérant le cas général (celui d'un nombre quelconque d'options), nous nous somme posé la question suivante : parmi toutes les méthodes d'agrégation possibles, la règle de Borda est-elle la seule règle (strictement monotone) qui satisfait aux quatre conditions (A), (N), (SPC) et (SPI) ?
La réponse est négative, elle est justifiée par l'exemple suivant :

Exemple 5.1. Soit $X = \{A, B, C, D, E, F\}$. Soit h la règle positionnelle simple définie par le vecteur score $V = (8, 6, 5, 3, 2, 0)$.

Il est évident que la CCS h est neutre, anonyme et strictement monotone. Nous allons montrer que :

1. h vérifie la condition (SPI).
2. h vérifie la condition (SPC).
3. h est différente de la règle de Borda.

1) Soit **R** un proril d'inversion. Sans perte de généralité, supposons que :

6. Voir, par exemple,[12], p.35.

$$\mathbf{R}: \quad \begin{array}{cc} A & F \\ B & E \\ C & D \\ D & C \\ E & B \\ F & A \end{array}$$

Il est facile de voir que les scores des différentes options, pour le profil **R**, sont tous égaux. En effet :

$$\begin{aligned} S_V(\mathbf{R}, A) &= 8 + 0 = 8 \\ S_V(\mathbf{R}, B) &= 6 + 2 = 8 \\ S_V(\mathbf{R}, C) &= 5 + 3 = 8 \\ S_V(\mathbf{R}, D) &= 3 + 5 = 8 \\ S_V(\mathbf{R}, E) &= 2 + 6 = 8 \\ S_V(\mathbf{R}, F) &= 0 + 8 = 8 \end{aligned}$$

Soit π un profil sur X. D'après la linéarité des scores, nous avons :

$$\begin{aligned} S_V(\pi + \mathbf{R}, x) &= S_V(\pi, x) + S_V(\mathbf{R}, x) \\ &= S_V(\pi, x) + 8 \end{aligned}$$

Ainsi, tous les scores sont augmentés de 8 points. Par conséquent l'ajout du profil d'inversion **R** ne change pas le résultat collectif produit par h et nous avons donc $h(\pi + \mathbf{R}) = h(\pi)$. Ce qui montre que h vérifie la condition (SPI).

2) Soit **C** un profil Condorcet. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que :

$$\mathbf{C}: \quad \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \\ C & D & E & F & A & B \\ D & E & F & A & B & C \\ E & F & A & B & C & D \\ F & A & B & C & D & E \end{array}$$

Là encore, les scores des six options sont tous égaux. En effet, comme chaque option occupe une, et une seule fois, chacune des six positions, nous avons :

$$S_V(\mathbf{C}, x) = 8 + 6 + 5 + 3 + 2 + 0 = 24, \text{ pour tout } x \text{ dans } X.$$

De la même manière que pour **1)**, en utilisant la linearité des scores, nous obtenons $S_V(\pi + \mathbf{C}) = S_V(\pi, x) + 24$. D'où $h(\pi + \mathbf{C}) = h(\pi)$ et donc h vérifie la condition (SPC).

3) Reste à voir que h n'est pas la règle de Borda. Pour cela, il suffit de considérer le profil π défini par :

$$\pi : \quad \begin{array}{cccc} A & C & E & D \\ B & B & F & F \\ C & A & D & E \\ D & F & A & C \\ E & E & B & B \\ F & D & C & A \end{array}$$

On vérifie sans peine que π correspond à une matrice de surclassement symétrique et que par conséquent là règle de Borda donne, comme résultat collectif, l'égalité entre tous les candidats (on peut aussi vérifier que tous les scores de Borda sont égaux à 10). Donc l'ensemble de choix, pour Borda, est l'ensemble X. En revanche, pour h, en calculant les scores, on obtient :

$$\begin{aligned} S_V(\pi, A) &= 8+5+3+0 = 16 \\ S_V(\pi, B) &= 6+6+2+2 = 16 \\ S_V(\pi, C) &= 5+8+0+3 = 16 \\ S_V(\pi, D) &= 3+0+5+8 = 16 \\ S_V(\pi, E) &= 2+2+8+5 = 17 \\ S_V(\pi, F) &= 0+3+6+6+ = 15 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $h(\pi) = \{E\}$. Ce qui montre que h est différente de la règle de Borda.

Ce « contre-exemple » nous a permis de voir que la méthode de Borda n'est pas le seule règle de décision (strictement monotone) qui vérifie les conditions (A), (N), (SPC) et (SPI). Par conséquent, les deux propriétés de stabilité par rapport aux profils symétriques ne suffisent pas (comme conditions de base) pour caractériser la règle de Borda. Cependant, un examen plus attentif de la nature du profil π, utilisé dans l'exemple pour distinguer la CCS h de la règle de Borda, conduit à une constatation importante : sa matrice de surclassement est symétrique. Il est donc normal que la règle de Borda, qui vérifie la condition d'annulation, produise une égalité totale sur ce profil (et par conséquent sur π). En revanche, comme aucune RPS (strictement monotone) autre que la règle de Borda ne vérifie la propriété d'annulation, il n'est pas surprenant que l'application de h au profil π conduise à un résultat différent.
Cette remarque nous invite à reformuler la question que nous nous sommes posée au début de ce paragraphe. En remplaçant la condition (SPI) par la condition (NS) (qui est la version « additive » de la propriété d'annulation), cette question devient : la règle de Borda est-elle la seule règle strictement monotone qui satisfait aux quatre conditions (A), (N), (SPC) et (NS) ?
Cette fois la réponse est plutôt positive : oui, si l'on impose l'hypothèse d'homogénéité. Dans ce cas un très faible degré de monotonie stricte suffit.
Nous avons donc besoin de l'homogénéité comme condition supplémentaire. Cet axiome est

peu contraignant, il correspond au niveau minimal de cohérence des méthodes d'agrégation et il est vérifié par la plupart des règles.
Avant de passer à la formulation et à la preuve de notre résultat de caractérisation, nous devons d'abord affaiblir l'exigence de monotonie stricte.
Pour une option x dans X et un profil $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{D}(X)$, notons $T_x^0(\pi)$ l'ensemble des profils obtenus à partir de π en changeant la préférence d'un seul votant, en faisant passer x de la dernière à la première place : un profil $\pi' = (p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dans $T_x^0(\pi)$ s'il existe un individu $j \in N$ tel que x est classée dernière dans p_j, x est classée première dans p'_j, $p_i = p'_i$ pour $i \neq j$ et les restrictions de p_j et p'_j à $X \setminus \{x\}$ sont égales.

Définition 5.1. Une CCS g est dite *P-monotone*[7] (PM) si, pour tout $x \in X$ et pour tous profils π, π' dans $\mathcal{D}(X)$, ($x \in g(\pi)$ et $\pi' \in T_x^0(\pi)$) $\Rightarrow g(\pi') = \{x\}$.

Il est clair que la monotonie stricte implique la P-monotonie . En effet, pour toute option x et pour tout profil π, nous avons $T_x^0(\pi) \subset T_x(\pi)$ (où $T_x(\pi)$ est l'ensemble que nous avons utilisé dans la définition 3.4). Notons aussi que cette propriété permet de prendre en compte le faible degré de monotonie stricte vérifié par des règles telles que la pluralité et l'antipluralité. En effet, il existe des situations où le comportement de ces deux règles est strictement monotone : tout candidat (appartenant à l'ensemble de choix) devient l'unique vainqueur de la pluralité (resp. de l'antipluralité), lorsque l'un des votants le fait passer d'une position quelconque à la première position (resp. de la dernière position à n'importe quelle autre position).

Remarquons aussi que la condition de P-monotonie n'implique pas forcement la monotonie (dans le sens de la définition 3.5) et qu'une CCS monotone n'est pas obligatoirement P-monotone.

Exemple 5.2.

1. La règle de la pluralité et la règle de l'antipluralité sont P-monotones mais ne sont pas strictement monotones. Plus généralement, pour un entier t ($1 \leq t \leq m_1$), soit g_t la RPS définie *via* le vecteur :

$$w_t = (\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{\text{t-fois}}, 0, \cdots, 0)$$

   Alors, g_t est monotone, P-monotone, mais n'est pas strictement monotone.
2. La RPS définie par $w = (2, 0, 1)$ est P-monotone mais n'est pas monotone.
3. La règle de Copeland, g^C, est monotone mais n'est pas P-monotone. En effet, soit π le profil défini par :

$$\pi : \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 4 \\ x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{array}$$

   Les résultats des comparaisons binaires pour ce profil sont : $x \succ_M y$, $y \succ_M z$ et $z \succ_M x$. Chacune des trois options obtient une victoire et une défaite dans les duels

7. Nous utilisons cette terminologie par référence à l'expression « *monotonie par passage à la première place* ».

majoritaires. D'où $g^C(\pi) = \{x, y, z\}$.
Supposons maintenant que l'un des quatre votants qui ont la préférence $z \succ x \succ y$ fasse passer l'option y de la dernière à la première position. Nous obtenons alors le profil suivant :

$$\pi' : \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{array}$$

Pour ce profil, nous avons toujours $x \succ_M y$, $y \succ_M z$ et $z \succ_M x$. Donc $g^C(\pi') = \{x, y, z\}$, le candidat y ne devient pas unique vainqueur.

Nous pouvons maintenant formuler le résultat que nous proposons pour caractériser la règle de Borda en tant que correspondance de choix social.

Thèoreme 5.1. *La règle de Borda est la seule CCS qui satisfait aux conditions (A), (N), (H), (SPC), (NS) et (PM).*

En théorie du choix social, la plupart des résultats de caractérisation ne comportent pas plus de quatre ou cinq conditions. Le théorème 5.1, qui en utilise six, parait donc mobiliser plus de propriétés qu'il ne faut. En réalité, outre les hypothèses classiques d'anonymat et de neutralité, les quatre autres conditions correspondent soit aux versions les plus faibles des propriétés employées dans les autres caractérisations, soit à des conséquences de la conjonction de deux de ces propriétés. En effet, l'homogénéité et la P-monotonie représentent respectivement les niveaux les plus bas de la consistance et de la monotonie stricte. La condition (SPC) n'est q'une conséquence, parmi d'autres, de la conjonction de l'axiome de neutralité et de celui de consistance. Enfin, la condition (SPI) n'est que la version « additive » de la propriété d'annulation, elle s'obtient comme conséquence de cette propriété lorsqu'elle est alliée à la condition de consistance.

La preuve du théorème 5.1, assez longue, sera divisée en une série de cinq lemmes. Notons $g^{\mathcal{B}}$ la règle de Borda, définie en tant que CCS. Nous commençons par vérifier que cette règle satisfait aux conditions du théorème.

Lemme 5.2. *La règle de Borda vérifie les conditions (A), (N), (H), (SPC), (NS) et (PM).*

Preuve. Il est évident que $g^{\mathcal{B}}$ vérifie les conditions (A) et (N). Les conditions (H), (SPC) et (NS) s'obtiennent comme conséquences des quatre propriétés suivantes :

$$S_{\mathcal{B}}(t\pi, x) = tS_{\mathcal{B}}(\pi, x), \quad \forall \pi \in \mathcal{D}(X), \forall x \in X, \forall t \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

$$S_{\mathcal{B}}(\pi + \pi', x) = S_{\mathcal{B}}(\pi, x) + S_{\mathcal{B}}(\pi', x), \quad \forall \pi, \pi' \in \mathcal{D}(X), \forall x \in X \tag{2}$$

$$S_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}^L, x) = S_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}^L, y), \quad \forall L \in \mathcal{L}(X), \forall x \in X \tag{3}$$

$$\forall I \in \mathcal{D}(X), (A(I) \text{ est symétrique }) \Rightarrow (S_{\mathcal{B}}(I, x) = S_{\mathcal{B}}(I, y), \forall x, y \in X) \tag{4}$$

Les égalités (1) et (2) sont évidentes, elles décrivent la linéarité des scores de Borda. En calculant les scores de Borda avec le vecteur points $w_{\mathcal{B}}$ et en remarquant que, dans $\mathbf{C}^L$, chaque option occupe une seule fois chacune des m positions, on obtient (3). La propriété

(4) s'obtient en calculant les scores de Borda du profil I, à partir de la matrice $A(I)$. Il est alors facile de voir que $g^{\mathcal{B}}$ est homogène (en utilisant (1)), qu'elle vérifie la condition (SPC) ((2) et (3)) et qu'elle est nulle stable ((2) et (4)).
En fin, pour établir la P-monotonie, il suffit de voir que lorsqu'un votant fait passer l'une des options gagnantes de la dernière à la première position (sans changer son classement pour les autres options), il fait gagner $m-1$ points à cette option. Les autres candidats perdent chacun un point. $\square$

Pour la suite de la démonstration, nous nous somme inspiré de la preuve de Young pour le théorème 3.3. Nous adaptons cette preuve aux conditions de notre résultat de caractérisation. Nous devons d'abord généraliser la notion de profil de base.

Définition 5.2. Soit x_r une option dans X. Soit L et L' deux ordre linéaires sur X tels que x_r occupe la première position dans L, x_r occupe la première position dans L' et $\overline{L}_{|X\setminus\{x_r\}} = L'_{|X\setminus\{x_r\}}$. Le *profil de base* associé à l'option x_r et à l'ordre L est le profil, noté $\mathbf{B}^{x_r}(L)$, formé par L et L'.

Ces profils ont été utilisés par Young [20] dans sa preuve du théorème 3.3. Pour $m = 3$, ils correspondent à la partie positive des profils différentiels de base que nous avons introduits dans la section précédente. Pour $m \geq 4$, Saari [15] définit le profil de base associé à une option x_r comme la somme de tous les $\mathbf{B}^{x_r}(L)$. La définition 5.2 est plus appropriée à la preuve que nous donnons du théorème 5.1.

Exemple 5.3. 1. Pour $m = 3$ et $X = \{A, B, C\}$, un seul profil de base est associé à chacun des trois candidats. En effet, pour chaque option, il n'y a que deux ordres linéaires où elle est classée première. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^A(L_1) =& \mathbf{B}^A(L_2) = \mathbf{B}^A\\ \mathbf{B}^B(L_3) =& \mathbf{B}^B(L_4) = \mathbf{B}^B\\ \mathbf{B}^C(L_5) =& \mathbf{B}^C(L_6) = \mathbf{B}^C\end{aligned}$$

Avec :

$$\mathbf{B}^A : \begin{array}{cc} 1 & 1\\ A & A\\ B & C\\ C & B\end{array} \qquad \mathbf{B}^B : \begin{array}{cc} 1 & 1\\ B & B\\ A & C\\ C & A\end{array} \qquad \mathbf{B}^C : \begin{array}{cc} 1 & 1\\ C & C\\ A & B\\ B & A\end{array}$$

2. Soit $m = 4$ et $X = \{A, B, C, D\}$. Pour chaque option, il existe six ordres linéaires où elle est classée première. Chacune des quatre options est donc associée à trois profils de bases différents. Par exemple, le candidat A occupe la première position dans les six ordres linéaires suivants :

$$\begin{array}{lll} L_1 : A \succ B \succ C \succ D & L_2 : A \succ B \succ D \succ C & L_3 : A \succ C \succ B \succ D\\ L_4 : A \succ C \succ D \succ B & L_5 : A \succ D \succ B \succ C & L_6 : A \succ D \succ C \succ B\end{array}$$

Les trois profils de base associés à A sont :

$$\mathbf{B}^A(L_1): \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ A & A \\ B & D \\ C & C \\ D & B \end{array} \qquad \mathbf{B}^A(L_2): \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ A & A \\ B & C \\ D & D \\ C & B \end{array} \qquad \mathbf{B}^A(L_3): \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ A & A \\ C & D \\ B & B \\ D & C \end{array}$$

Par symétrie, nous avons $\mathbf{B}^A(L_1) = \mathbf{B}^A(L_6)$, $\mathbf{B}^A(L_2) = \mathbf{B}^A(L_4)$ et $\mathbf{B}^A(L_3) = \mathbf{B}^A(L_5)$.

Remarque 5.1. Tous les profils de base associés à une même option x_r dans X ont la même matrice de surclassement. En effet, soit L un ordre linéaire quelconque où x_r est classée première. On vérifie sans peine que les coefficients de la matrice $A(\mathbf{B}^{x_r}(L))$ sont donnés par :

$$\begin{array}{lr} a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}(L)) = 2 & \text{si } j = r \text{ et } k \neq r. \\ a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}(L)) = 0 & \text{si } j \neq r \text{ et } k = r. \\ a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}(L)) = 1 & \text{si } j \neq r \text{ , } k \neq r \text{ et } j \neq k. \\ a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}(L)) = 0 & \text{si } j = k. \end{array}$$

Le lemme suivant nous permettra, dans toute la suite de la preuve, d'utiliser, de façon interchangeable, les profils (ou les parties de profils) qui ont les mêmes matrices de surclassement.

Lemme 5.3. *Si g est une CCS anonyme et nulle stable, alors g est une règle basée sur les comparaisons par paires.*

Preuve. Notons d'abord que pour tous profils π, π' dans $\mathcal{D}(X)$, les coefficients des matrices $A(\pi + \pi')$ et $A(\overline{\pi})$ sont donnés par :

$$a_{jk}(\pi + \pi') = a_{jk}(\pi) + a_{jk}(\pi') \quad \text{(linéarité)} \tag{1}$$
$$a_{jk}(\overline{\pi}) = a_{kj}(\pi) \tag{2}$$

La relation (1) est évidente et la relation (2) est une conséquence directe de la définition de $\overline{\pi}$: à chaque préférence $(x_j \succ x_k)$ dans π correspond une préférence $(x_k \succ x_j)$ dans $\overline{\pi}$.
Soit maintenant π et π' deux profils tels que $A(\pi) = A(\pi')$. Il s'agit de montrer que $g(\pi) = g(\pi')$.
Pour tout j, k dans $\{1, \cdots, m\}$, nous avons :

$$a_{jk}(\pi) = a_{jk}(\pi') \text{ et } a_{jk}(\overline{\pi}) = a_{jk}(\overline{\pi'}) \tag{3}$$

En utilisant les relations (1), (2) et (3), on obtient :

$$\begin{aligned} a_{jk}(\pi+\overline{\pi'}) &= a_{jk}(\pi)+a_{jk}(\overline{\pi'}) \\ &= a_{jk}(\pi)+a_{kj}(\pi') \\ &= a_{jk}(\pi)+a_{kj}(\pi) \\ &= a_{kj}(\pi)+a_{jk}(\pi) \\ &= a_{kj}(\pi)+a_{kj}(\overline{\pi}) \\ &= a_{kj}(\pi)+a_{kj}(\overline{\pi'}) \\ &= a_{kj}(\pi+\overline{\pi'}). \end{aligned}$$

Ce calcul montre que la matrice $A(\pi+\overline{\pi'})$ est symétrique. Il est facile de voir que le profil $\pi'+\overline{\pi'}$ a aussi une matrice de surclassent symétrique.
La CCS g étant anonyme et nulle stable, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\pi') &= g(\pi'+(\pi+\overline{\pi'})) && \text{(car } A(\pi+\overline{\pi'}) \text{ est symétrique)} \\ &= g(\pi+(\pi'+\overline{\pi'})) && \text{(car } g \text{ est anonyme)} \\ &= g(\pi) && \text{(car } A(\pi'+\overline{\pi'}) \text{ est symétrique)} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que g est basée sur les comparaisons par paires. □

Remarque 5.2. Une conséquence de ce lemme, importante pour la suite de la preuve, est que le résultat collectif associé à un profil, par une CCS anonyme et nulle stable, ne change pas si une partie de ce profil est remplacée par une autre partie qui à la même matrice de surclassement. Nous avons déjà noté, par la remarque 5.1, que les profils de base associés à une même option ont tous la même matrice de surclassement. Les CCS considérées dans tous les lemmes qui vont suivre étant anonymes et nulles stables, nous simplifions la notation pour les profils des base associés à l'option x_r, en ignorant la référence à l'ordre linéaire dans lequel cette option occupe la première position. Ainsi, la notation $\mathbf{B}^{x_r}$ désignera n'importe lequel des profils de base ($\mathbf{B}^{x_r}(L)$) associés à l'option x_r.

Le lemme suivant constitue l'essentiel de la preuve de théorème 5.1. Il reprend, de manière différente, la technique de décomposition des profils, utilisée par Young [20] dans sa preuve du théorème 3.3.

Lemme 5.4. *Soit $L = x_{s_1} \succ x_{s_2} \succ \cdots x_{s_m}$ un ordre linéaire sur X. Alors :*

$$A\big(mL+\frac{m(m-1)}{2}\boldsymbol{R}^L\big) = A\big(\sum_{r=1}^{m}(m-r)\boldsymbol{B}^{x_{s_r}}+\boldsymbol{C}^L\big)$$

Preuve. Pour simplifier, nous allons d'abord établir ce résultat pour l'ordre $L_1 = x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_m$.
Notons $\pi_1 = mL_1 + \frac{m(m-1)}{2}\mathbf{R}^{L_1}$ et $\pi_2 = \sum_{r=1}^{m}(m-r)\mathbf{B}^{x_r}+\mathbf{C}^{L_1}$. Il s'agit de montrer que $A(\pi_1) = A(\pi_2)$.

La matrice de surclassement du profil formé par l'unique ordre linéaire L_1 est donnée par :

$$\begin{array}{ll} a_{jk}(L_1) = 1 & \text{si } j > k. \\ a_{jk}(L_1) = 0 & \text{si } j > k. \\ a_{jk}(L_1) = 0 & \text{si } j = k. \end{array}$$

Les coefficients de $A(\mathbf{R}^{L_1})$ sont :

$$\begin{array}{ll} a_{jk}(\mathbf{R}^{L_1}) = 1 & \text{si } j \neq k. \\ a_{jk}(\mathbf{R}^{L_1}) = 0 & \text{si } j = k. \end{array}$$

En revenant à la définition de $\mathbf{C}^L$, on peut vérifier que :

$$\begin{array}{ll} a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) = m - (k - j) & \text{si } j < k. \\ a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) = j - k & \text{si } j > k. \\ a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) = 0 & \text{si } j = k. \end{array}$$

Nous connaissons déjà (remarque 5.1) la matrice de surclassement d'un profil de base associé à une option x_r :

$$\begin{array}{lr} a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) = 2 & \text{si } j = r \text{ et } k \neq r. \\ a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) = 0 & \text{si } j \neq r \text{ et } k = r. \\ a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) = 1 & \text{si } j \neq r \text{ , } k \neq r \text{ et } j \neq k. \\ a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) = 0 & \text{si } j = k. \end{array}$$

Calculons les coefficients de la matrice $A(\pi_1)$. En utilisant les égalités précédentes et la linéarité des matrices de surclassement, nous obtenons :

1) Pour $j < k$:

$$\begin{aligned} a_{jk}(\pi_1) &= m a_{jk}(L_1) + \frac{m(m-1)}{2} a_{jk}(\mathbf{R}^{L_1}) \\ &= m \qquad + \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

2) Pour $j > k$:

$$\begin{aligned} a_{jk}(\pi_1) &= m a_{jk}(L_1) + \frac{m(m-1)}{2} a_{jk}(\mathbf{R}^{L_1}) \\ &= 0 \qquad + \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{m(m-1)}{2} \end{aligned}$$

3) Pour $j = k$, $a_{jk}(\pi_1) = 0$

Calculons maintenant les coefficients de la matrice $A(\pi_2)$:

1) Pour $j < k$:

$$\begin{aligned}
a_{jk}(\pi_2) &= \sum_{r=1}^{m}(m-r)a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) + a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) \\
&= \sum_{r\notin\{j,k\}}(m-r)a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) + (m-j)a_{jk}(\mathbf{B}^{x_j}) + (m-k)(a_{jk}(\mathbf{B}^{x_k}) + a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) \\
&= \sum_{r\notin\{j,k\}}(m-r) \qquad + \ 2(m-j) \qquad + \quad 0 \qquad + \ \ m-(k-j) \\
&= \big(\sum_{r=1}^{m}(m-r)-(m-j)-(m-k)\big) \ + \ 2(m-j) \ + \ m-(k-j) \\
&= \big(\frac{m(m-1)}{2}-(m-j)-(m-k)\big) \ +2(m-j) \ + \ m-(k-j) \\
&=\frac{m(m-1)}{2}+(m-j)-(m-k)+ \ m-(k-j) \\
&=\frac{m(m-1)}{2}+m \\
&= \frac{m(m+1)}{2}.
\end{aligned}$$

2) Pour $j > k$:

$$\begin{aligned}
a_{jk}(\pi_2) &= \sum_{r=1}^{m}(m-r)a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) + a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) \\
&= \sum_{r\notin\{j,k\}}(m-r)a_{jk}(\mathbf{B}^{x_r}) + (m-j)a_{jk}(\mathbf{B}^{x_j}) + (m-k)(a_{jk}(\mathbf{B}^{x_k}) + a_{jk}(\mathbf{C}^{L_1}) \\
&= \sum_{r\notin\{j,k\}}(m-r) \qquad + \ 2(m-j) \qquad + \quad 0 \qquad + \ \ (j-k) \\
&= \big(\sum_{r=1}^{m}(m-r)-(m-j)-(m-k)\big) \ + \ 2(m-j) \ + \ (j-k) \\
&= \big(\frac{m(m-1)}{2}-(m-j)-(m-k)\big) \ +2(m-j) \ + \ (j-k) \\
&=\frac{m(m-1)}{2}+(m-j)-(m-k)+ \ (j-k) \\
&=\frac{m(m-1)}{2}.
\end{aligned}$$

3) Pour $j = k$, $a_{jk}(\pi_2) = 0$.

Les matrices $A(\pi_1)$ et les mêmes coefficients $A(\pi_2)$ ont donc les mêmes coefficients, ce qui permet d'écrire :

$$A(\pi_1) = A(\pi_2)$$

Notons que cette dernière égalité reste vraie si l'on permute les options de la même manière dans π_1 et dans π_2. Donc, pour toute permutation σ définie sur X, nous avons :

$$A(\sigma(\pi_1)) = A(\sigma(\pi_2)) \tag{1}$$

L'égalité (1) va nous permettre de généraliser la preuve à n'importe quel ordre linéaire sur X.
Soit $L = x_{s_1} \succ x_{s_2} \succ \cdots x_{s_m}$ un ordre linéaire sur X et soit σ la permutation définie sur X par $\sigma(x_j) = \sigma(x_{s_j})$, pour tout j dans $\{1, \cdots, m\}$. Les égalités suivantes sont immédiates :

$$\sigma(L_1) = L, \sigma(\mathbf{C}^{L_1}) = \mathbf{C}^L \text{ et } \sigma(\mathbf{R}^{L_1}) = \mathbf{R}^L \tag{2}$$

En définissant chacun des $\mathbf{B}^{x_{s_r}}$ à partir de l'image par σ de l'ordre linéaire associé à B^{x_r}, on obtient :

$$\sigma(\mathbf{B}^{x_r}) = \mathbf{B}^{x_{s_r}} \tag{3}$$

En utilisant (1), (2) et (3), le calcul suivant devient élémentaire :

$$\begin{aligned}
A\big(mL + \frac{m(m-1)}{2}\mathbf{R}^L\big) &= A\big(m\sigma(L_1) + \frac{m(m-1)}{2}\sigma(\mathbf{R}^{L_1})\big) \\
&= A\big(\sigma(mL_1 + \frac{m(m-1)}{2}\mathbf{R}^{L_1})\big) \\
&= A(\sigma(\pi_1)) \\
&= A(\sigma(\pi_2)) \\
&= A\big(\sigma\big(\sum_{r=1}^{m}(m-r)\mathbf{B}^{x_r} + \mathbf{C}^{L_1}\big)\big) \\
&= A\big(\sum_{r=1}^{m}(m-r)\sigma(\mathbf{B}^{x_r}) + \sigma(\mathbf{C}^{L_1})\big) \\
&= A\big(\sum_{r=1}^{m}(m-r)\mathbf{B}^{x_{s_r}} + \mathbf{C}^{L}\big).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme 5.4. □

Exemple 5.4. 1. Pour $L_1 = x \succ y \succ z$ et $L_5 = z \succ x \succ y$, on vérifie que :

$$\begin{aligned}
A(3L_1 + 3\mathbf{R}^{L_1}) &= A(2\mathbf{B}^x + \mathbf{B}^y + \mathbf{C}^{L_1}) \\
A(3L_5 + 3\mathbf{R}^{L_5}) &= A(2\mathbf{B}^z + \mathbf{B}^x + \mathbf{C}^{L_5})
\end{aligned}$$

2. Soit $X = \{x, y, z, t\}$, $L = x \succ y \succ z \succ t$, et $L' = y \succ t \succ x \succ z$, on vérifie que :

$$\begin{aligned}
A(4L + 6\mathbf{R}^L) &= A(3\mathbf{B}^x + 2\mathbf{B}^y + \mathbf{B}^z + \mathbf{C}^L) \\
A(4L' + 6\mathbf{R}^{L'}) &= A(3\mathbf{B}^y + 2\mathbf{B}^t + \mathbf{B}^x + \mathbf{C}^{L'})
\end{aligned}$$

3. Pour $L = x \succ y \succ z \succ t \succ u$, on a :

$$A(5L + 10\mathbf{R}^L) = A(4\mathbf{B}^x + 3\mathbf{B}^y + 2\mathbf{B}^z + \mathbf{B}^t + \mathbf{C}^L)$$

Notons que dans toutes ces égalités, chacun des termes $\mathbf{R}^L$ peut être remplacé par n'importe quel autre terme d'inversion. Ces égalités ne changent pas non plus, si un profil de base associé a une option donnée est remplacé par un autre profil de base associé à cette option.

Le lemme suivant permet, pour toute CCS qui vérifie les conditions du théorème 5.1, de traiter chaque profil comme s'il était composé uniquement de profils de base.

Lemme 5.5. *Soit π profil dans $\mathcal{D}(X)$. Il existe m entiers naturels $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ tels que : pour toute CCS g anonyme, homogène et nulle stable,*

$$g(\pi) = g\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \boldsymbol{B}^{x_r}\big)$$

Preuve. Soit $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ un profil défini sur X. D'après le lemme précédent, pour chaque ordre linéaire p_i, il existe des entiers naturels $\lambda_1(p_i), \cdots, \lambda_m(p_i)$ tels que :

$$A\big(mp_i + \frac{m(m-1)}{2}\mathbf{R}^{p_i}\big) = A\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r(p_i)\mathbf{B}^{x_r} + \mathbf{C}^{p_i}\big)$$

Posons :

$$\lambda_r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_r(p_i) \qquad \text{pour tout } r \text{ dans } \{1, \cdots, m\}$$

$$\mathbf{R} = \frac{m(m-1)}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}^{p_i}$$

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}^{p_i}$$

Par la linéarité des matrices de surclassement, on a :

$$A\big(m\pi + \mathbf{R}\big) = A\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r} + \mathbf{C}\big)$$

Soit g une CCS vérifiant les conditions du lemme. Comme g est anonyme et nulle stable, elle ne dépend que des matrices de surclassement (d'après le lemme 5.3). Nous avons donc :

$$g\big(m\pi + \mathbf{R}\big) = g\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r} + \mathbf{C}\big) \tag{1}$$

Or le profil $\mathbf{R}$ est la sommes de profils d'inversions, sa matrice de surclassement est donc symétrique. La CCS g étant nulle stable, la suppression de ce profil du premier membre de l'égalité (1) ne change pas cette égalité. De plus, le profil $\mathbf{C}$ est la somme de profils Condorcet. Comme g vérifie la condition (SPC), ce profil peut être supprimé du deuxième membre de (1). Cette égalité devient donc :

$$g(m\pi) = g\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r}\big)$$

Par hypothèse, g est homogène. Nous avons donc $g\big(m\pi) = g(\pi)$, et par conséquent $g(\pi) = g\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r}\big)$. $\square$

Exemple 5.5. soit π le profil défini sur $X = \{x, y, z\}$ par :

$$\pi : \quad \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 7 \\ x & x & y \\ y & z & x \\ z & y & z \end{array}$$

Ce profil s'écrit $\pi = 4L_1 + 5L_2 + 7L_3$. Par le lemme 5.4, nous avons :

$$\begin{aligned} A(3L_1 + 3\mathbf{R}^{L_1}) &= A(2\mathbf{B}^x + \mathbf{B}^y + \mathbf{C}^{L_1}) \\ A(3L_2 + 3\mathbf{R}^{L_2}) &= A(2\mathbf{B}^x + \mathbf{B}^z + \mathbf{C}^{L_2}) \\ A(3L_3 + 3\mathbf{R}^{L_3}) &= A(2\mathbf{B}^y + \mathbf{B}^x + \mathbf{C}^{L_3}) \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de chacune de ces trois égalités respectivement par 4, 5 et 7, en additionnant et en utilisant la linéarité des matrices de surclassement, on obtient :

$$A(3\pi + 12R^{L_1} + 15R^{L_2} + 21R^{L_3}) = A(25\mathbf{B}^x + 18\mathbf{B}^y + 5\mathbf{B}^z + 4\mathbf{C}^{L_1} + 5\mathbf{C}^{L_2} + 7\mathbf{C}^{L_3})$$

Notons $\Lambda(\pi)$ le profil défini par :

$$\Lambda(\pi) = 25\mathbf{B}^x + 18\mathbf{B}^y + 5\mathbf{B}^z$$

Toute CCS qui vérifie les conditions du lemme précédent (en particulier, la règle de Borda), associe le même résultat à π et à $\Lambda(\pi)$.

Plus généralement, pour un profil quelconque, les coefficients λ_r $(1 \leq r \leq m)$ associés à ce profil par le lemme 5.5 peuvent être calculés de la même manière que dans l'exemple précédent. Nous n'avons pas besoin de ce calcul pour la suite. En revanche, nous devons connaître les scores de Borda pour chaque profil de base. En appliquant indistinctement la formule (2.1) (utilisation du vecteur score $w_{\mathcal{B}} = (m-1, \cdots, 1, 0)$) ou la formule (2.3) (utilisation de la matrice de surclassement), on a :

$$S_{\mathcal{B}}(\mathbf{B}^{x_r}, x_j) = 2(m-1) \quad \text{si } j = r \tag{5.1}$$

$$S_{\mathcal{B}}(\mathbf{B}^{x_r}, x_j) = (m-2) \quad \text{si } j \neq r \tag{5.2}$$

La formule 5.1 vient du fait que x_r occupe la première place dans les deux ordres linéaires qui forment $\mathbf{B}^{x_r}$. Pour la formule 5.2, il suffit de voir que (par définition de $\mathbf{B}^{x_r}$) si une option x_j $(j \neq r)$ occupe une position p $(2 \leq p \leq m)$ dans l'un des deux ordres, alors elle est se retrouve à la place $(m+2) - p$ dans l'autre ordre.
Un simple calcul, basée sur ces deux formules, permet de vérifier que pour tout profil π de la forme $\pi = \sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r}$,

$$(S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = S_{\mathcal{B}}(\pi, x_k)) \Leftrightarrow \ \lambda_j = \lambda_k \tag{5.3}$$

$$(S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) > S_{\mathcal{B}}(\pi, x_k)) \Leftrightarrow \ \lambda_j > \lambda_k \tag{5.4}$$

Lemme 5.6. *Soit g une CCS anonyme, neutre, homogène et vérifiant les conditions (NS) et (SPC). Soit π un profil et x_j, x_k deux options telles que $S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = S_{\mathcal{B}}(\pi, x_k)$. Alors, x_j est dans $g(\pi)$ si et seulement si x_k est dans $g(\pi)$.*

Preuve. D'après le lemme 5.5, il existe des entiers naturels $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ tels que :

$$g(\pi) = g\big(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r}\big)$$

Notons $\Lambda(\pi)$ le profil défini dans le deuxième membre de cette égalité :

$$\Lambda(\pi) = \sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r}$$

Nous avons donc :

$$g(\pi) = g\big(\Lambda(\pi)\big) \tag{1}$$

Comme la règle de Borda, $g^{\mathcal{B}}$, vérifie les conditions du lemme 5.5, nous avons aussi :

$$g^{\mathcal{B}}(\pi) = g^{\mathcal{B}}\big(\Lambda(\pi)\big) \tag{2}$$

Par hypothèse, nous avons $S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) = S_{\mathcal{B}}(\pi, x_k)$. D'après (2), les options x_j et x_k doivent aussi avoir les mêmes scores de Borda dans le profil $\Lambda(\pi)$. En appliquant la formule (5.3), on obtient :

$$\lambda_j = \lambda_k \tag{3}$$

Soit τ la transposition de x_j et x_k, c'est-à-dire la permutation, définie sur X, qui échange x_j et x_k et laisse invariantes toutes les autres options. En tenant compte de la remarque 5.2 (les profils de base associés à une option peuvent être définis à partir de n'importe quel ordre linéaire où cette option est classée première), on a :

$$\tau(\mathbf{B}^{x_j}) = B^{x_k},\ \tau(\mathbf{B}^{x_k}) = B^{x_j} \ \text{ et } \ \tau(\mathbf{B}^{x_r}) = B^{x_r} \text{ pour } r \notin \{j, k\} \tag{4}$$

Par (3) et (4), on obtient $\tau(\Lambda(\pi)) = \Lambda(\pi)$. La CCS g étant neutre, on doit avoir :

$$x_j \in g(\Lambda(\pi)) \Leftrightarrow x_k \in g(\Lambda(\pi))$$

Et comme $g(\Lambda(\pi)\big) = g(\pi)$ (d'après (1)), on a $x_j \in g(\pi) \Leftrightarrow x_k \in g(\pi)$. □

Lemme 5.7. *Soit g une CCS anonyme, neutre, homogène et vérifiant les conditions (NS), (SPC) et (PM). Soit π un profil et x_j, x_k deux options tels que $S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) > S_{\mathcal{B}}(\pi, x_k)$. Alors, x_k n'appartient pas à $g(\pi)$.*

Preuve. Soit $\Lambda(\pi) = \sum_{r=1}^{m} \lambda_r \mathbf{B}^{x_r}$ tel que :

$$g(\pi) = g(\Lambda(\pi)) \tag{1}$$

Par hypothèse, nous avons $S_{\mathcal{B}}(\pi, x_j) > S_{\mathcal{B}}(\pi, x_k)$. Comme $g^{\mathcal{B}}(\pi) = g^{\mathcal{B}}\big(\Lambda(\pi)\big)$, on doit avoir $S_{\mathcal{B}}(\Lambda(\pi), x_j) > S_{\mathcal{B}}(\Lambda(\pi), x_k)$. Par la formule (5.4), on obtient :

$$\lambda_j > \lambda_k$$

Soit L un ordre linéaire sur X, où x_k occupe la première place. Soit d l'entier strictement positif défini par $d = \lambda_j - \lambda_k$ et soit π' le profil défini par :

$$\pi' = \Lambda(\pi) + d\mathbf{R}^L$$

La CCS g étant nulle stable et $A(\mathbf{R}^L)$ étant symétrique, on a :

$$g(\pi') = g(\Lambda(\pi)) \tag{2}$$

Supposons maintenant que l'option x_k soit dans $g(\pi)$. D'après (1), x_k sera aussi dans $g(\Lambda(\pi))$. Par l'égalité (2), on aura :

$$x_k \in g(\pi') \tag{3}$$

Soit π'' le profil obtenu à partir de π' de la manière suivante : dans chacun des d profils $\mathbf{R}^L$, le votant qui à la préférence $\overline{L}$ fait passer l'option x_k à la première position (en conservant son classement des autres options). Par la P-monotonie et par (3), nous devons avoir

$$g(\pi'') = \{x_j\} \tag{4}$$

D'un autre côté, chacun de ces votants qui ont changé leurs préférences en faisant passer x_k à la première position, transforme l'un des d profils d'inversion $\mathbf{R}^L$ en un profil de base $\mathbf{B}^{x_k}$. Or, l'entier d représente la différence (dans π') entre le nombre de profils de base associés à x_j et le nombre de profils de base associés à x_k. Par conséquent, le profil π'' est de la forme :

$$\pi'' = \textstyle\sum_{r=1}^{m} \gamma_r \mathbf{B}^{x_r} \qquad \text{avec } \gamma_j = \gamma_k$$

D'après le lemme 5.6, nous avons : $x_j g(\pi'') \Leftrightarrow x_k g(\pi'')$. Ce qui est en contradiction avec (4) et qui prouve qu'il n'est pas possible que l'option x_k soit dans $g(\pi)$. $\square$

Preuve du théorème 5.1. Par le lemme 5.2, la règle de Borda vérifie les conditions (A), (N), (H), (NS), (SPC) et (PM).

Réciproquement, soit g une CCS qui satisfait à ces conditions. Soit π un profil dans $\mathcal{D}(X)$. D'après les lemmes 5.6 et 5.7,

$$g(\pi) = \{x \in X : S_{\mathcal{B}}(\pi, x) \geq S_{\mathcal{B}}(\pi, y), \forall y \in X\}$$

Cette identité prouve que g est la règle de Borda. $\square$

Le résultat que nous venons de prouver [8]concerne les correspondances de choix social. Une preuve similaire à celle que nous venons de présenter, permet de montrer que la règle de Borda est aussi la seule fonction d'utilité sociale qui satisfait aux conditions du théorème 5.1, adaptées au contexte de rangement.

Notons aussi que dans le cas particulier où il n'y a que trois candidats à départager, les conditions (NS) se réduit à la condition (SPI) (conséquence de la proposition 2.1). Il s'en suit que, dans ce cas, les deux propriétés de stabilité par rapport aux profils symétriques suffisent (comme conditions principales) pour obtenir une caractérisation de la règle de Borda.

Corollaire 5.8. *Pour $m = 3$, la règle de Borda est la seule CCS qui vérifie les conditions (A), (N), (H), (SPI), (SPC) et (PM).*

8. L'indépendance des axiomes (N), (H), (NS), (SPC) et (PM) n'est pas difficile à établir. L'indépendance de la condition (A) par rapport aux autres conditions semble être moins évidente. Ces vérifications, un peu longues, ne seront pas présentées ici.

6 Conclusion

La plupart des résultats de caractérisation de la règle de Borda sont basés sur l'axiome de consistance. D'autres axiomatisations de cette méthode utilisent (aussi) l'axiome de monotonie stricte. Souvent, la propriété d'annulation est aussi employée pour distinguer cette règle des autres règles positionnelles simples. Dans le résultat que nous venons de présenter, nous n'avons utilisé que les versions les plus faibles des deux premières conditions : l'homogénéité et la P-monotonie.
Notre travail était surtout motivé par une approche originale des règles de décision, fondée sur la technique de décomposition des profils. Cette analyse permet, pour chaque profil, d'identifier une composante de base qui représente le « vrai » profil et des composantes symétriques qui doivent être ignorées. La règle de Borda répondant à cette exigence, nous avons examiné la possibilité de la caractériser par les deux propriétés de stabilité par rapport aux profils symétriques. Nous avons alors été amené à remplacer l'une de ces deux conditions par sa version forte qui correspond à la forme « additive » de la propriété d'annulation. En définitif, outres les hypothèses minimales d'anonymat et de neutralité, toutes les conditions que nous avons mobilisées correspondent soit à un affaiblissement des propriétés habituellement utilisées, soit à la conjonction de l'une de ces propriétés et d'un faible degré de consistance. Vu sous cet angle, notre résultat de caractérisation donne à la règle de Borda une plus large étendue axiomatique.

Références

[1] D. BOUYSSOU. Ranking methods based on valued preference relations : A characterization of the net flow method. *European Journal of Operational Research*, 60 :61–67, 1992.

[2] J.C. de BORDA. *Mémoires sur les Élections au Scrutin*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 1781.

[3] B. DEBORD. *Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences*. PhD thesis, Université Scientifique, Technique et Médicale de Grenoble, 1987.

[4] B.J. FINE and K. FINE. Social choice and individual ranking I. *Review of Economic Studies*, 41 :303–322, 1974.

[5] B.J. FINE and K. FINE. Social choice and individual ranking II. *Review of Economic Studies*, pages 459–475, 1974.

[6] P.C. FISHBURN and W.V. GEHRLEIN. Borda's rule, positional voting, and Condorcet's simple majority priciple. *Public Choice*, 28 :79–88, 1976.

[7] B. HANSSON and H. SAHLQUIST. A proof technique for social choice with variable electorate. *Journal of Economic Theory*, 13 :193–200, 1976.

[8] T. MARCHANT. Valued relations aggregation with the Borda method. *Journal of Multi-Criteria Analysis*, 5 :127–132., 1996.

[9] T. MARCHANT. Cardinality and the Borda score. *European Journal of Operational Research*, 108 :464–472, 1998.

[10] R. MYERSON. Axiomatic derivation of scoring rules without the ordering assumption. *Social Choice and Welfare*, 12 :59–74, 1995.

[11] S. NITZAN and A. RUBINSTEIN. A further characterization of borda ranking method. *Public Choice*, 36 :153–158, 1981.

[12] S. OULD-ALI. *Variations autour de la méthode de Borda : une approche axiomatisée*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2000.

[13] T.C. RATLIFF. A comparison of Dodgson's method and the Borda count. *Economic Theory*, 20 :357–372, 2002.

[14] D.G. SAARI. Explaining all three-alternative voting outcomes. *Journal of Economic Theory*, 87 :313–355, 1999.

[15] D.G. SAARI. Mathematical structure of voting paradoxes : I. pairwise votes. *Economic Theory*, 15 :1–53, 2000.

[16] D.G. SAARI. Mathematical structure of voting paradoxes :II. positional votings. *Economic Theory*, 15 :55–102, 2000.

[17] D.G. SAARI. Capturing the 'will of the people'. *Ethics*, 113 :333–334, 2003.

[18] D.G. SAARI. Which is better : the Condorcet or or Borda winner ?ethics. *Social Choice and Welfare*, 2005.

[19] J.H. SMITH. Aggregation of preferences with variable electorate. *Econometrica*, 41 :1027–1041, 1973.

[20] H.P. YOUNG. An axiomatization of Borda's rule. *Journal of Economic Theory*, 9 :43–52, 1974.

[21] H.P. YOUNG. A note on preference aggregation. *Econometrica*, 42 :1129–1131, 1974.

[22] H.P. YOUNG. Social choice scoring functions. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 28 :824–833, 1975.