Un résultat de caractérisation pour la règle de Borda itérative

(Document de travail)

Hatem Smaoui
CEMOI- Université de La Réunion, 2010

RÉSUMÉ. Dans ce document, nous proposons une analyse axiomatique des règles positionnelles itératives. Nous nous intéresserons particulièrement aux conditions de renforcement que pourraient vérifier ces méthodes d'élimination séquentielles. Nous introduisons une version globale de l'axiome de séparabilité de Smith [19] (1973) et une condition d'indépendance par rapport aux options perdantes. Nous proposons alors une dérivation axiomatique de la règle de Borda itérative, basée sur ces deux conditions et sur les propriétés de nulle-stabilité et de monotonie faible.

Mots-clés : théorie du vote, agrégation des préférences, axiomatisation, règle de Borda, conditions de renforcement.

introduction

Les règles positionnelles itératives (RPI), appelées aussi règles positionnelles séquentielles, sont des méthodes d'agrégation dont le principe est d'utiliser les règles positionnelles simples dans un processus d'élimination des options se déroulant sur plusieurs étapes. Dans un contexte de sélection, le choix des options gagnantes se déroule de la manière suivante : un premier vecteur points est utilisé et les options dont les scores sont les plus faibles sont éliminées ; un deuxième vecteur est alors appliqué et de nouvelles options sont éliminées. Le processus se poursuit jusqu'à ce qu'aucune élimination ne soit possible, les options restantes forment l'ensemble de choix collectif (idéalement réduit à un seul vainqueur). Dans un contexte de rangement, le classement collectif est obtenu en inversant l'ordre d'élimination des options. À chaque tour, les options éliminées seront considérées comme équivalentes entre elles et moins bonnes que les options restantes. Les options qui restent jusqu'à la fin du processus seront jugées équivalentes et classées premières. C'est cette manière de décrire les RPI, proposée par Richelson [14], que nous retenons dans ce papier. Nous noterons cependant qu'il existe d'autres façons de les définir. Par exemple, en introduisant un seuil d'élimination à chaque étape (comme pour les méthodes de Nanson [12] et de Kim et Roush [7]) ou en fixant d'avance le nombre de candidats qui seront éliminés à chaque tour (voir Smith [19] et Merlin [10]).

L'un des avantages que présente cette famille de règles de décision est leur aptitude, tout en étant des méthodes à scores, à répondre favorablement aux (versions faibles des) critères majoritaires. En effet, le processus d'élimination séquentielle permet d'améliorer significativement les performances majoritaires des règles positionnelles (voir Lepelley et Merlin [9]). Cependant, comme toutes les méthodes d'agrégation, les RPI ont aussi plusieurs défauts. Le plus important de ces défauts est (peut-être) le viol de la condition de monotonie (Smith [19]). Le non-respect des condition de renforcement (consistance [20], séparabilité [19]) est aussi une difficulté non négligeable qui peut apparaitre avec l'utilisation de ces règles. En effet, les théorèmes de Smith [19] et de Young [20] montrent que les seules fonctions d'utilité sociale (resp. correspondances de choix social) séparables (resp. consistantes) sont les règles positionnelles simples (ou composées) [1]. L'idée générale décrite par ces conditions est la suivante : si pour deux groupes de votants la décision collective conduit à un même résultat, alors ce résultat ne doit pas changer lorsque les deux groupes sont réunis.

Dans ce papier, nous nous proposons d'examiner les raisons pour lesquelles les RPI violent l'axiome de séparabilité au sens de Smith et de relativiser la portée de ce défaut. En étudiant les différentes versions faibles de la propriété de séparabilité qui ont été proposées dans la littérature, nous introduisant une nouvelle condition de renforcement que nous appelons condition de séparabilité globale et nous montons que cette propriété est satisfaite pour toutes les RPI (définies comme des fonctions d'utilité sociale). Comparée à la condition de séparabilité de Smith, qui peut être regardée comme une propriété de cohérence locale, la condition de séparabilité globale correspond à une exigence de stabilité de la « forme générale » du classement collectif. Pour illustrer l'intérêt que peut avoir le recours à la condition de séparabilité globale dans l'étude théorique des règles positionnelles itératives, nous proposons une première caractérisation de la règle de Borda itérative par un ensemble de propriétés incluant cette nouvelle condition et une version faible de l'axiome d'indépendance que nous appelons condition d'indépendance par rapport aux options perdantes. Le reste du papier est organisé comme suit. Les deux premières sections sont consacrées aux définitions, aux notations et à la présentation de quelques propriétés des RPI. La section 3 présente la condition de la séparabilité globale et la compare aux autres conditions de renforcement. La section 4 propose une première dérivation axiomatique de la règle de Borda itérative et la section 5 conclut le papier.

1. Les règles positionnelles composées fonctionnent de la même manière que les RPS, mais elles utilisent plusieurs vecteurs score pour trancher les cas d'égalité entre candidats.

1 Définitions et notations

Soient X un ensemble de m candidats (ou options), avec $m \geq 2$), et N un ensemble de n votants (agnts, individus), avec $n \geq 1$. On désigne par $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des préordres complets sur X et par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des ordres linéaires sur X. Pour un préordre R dans $\mathcal{R}(X)$, on notera $P(R)$ et $I(R)$ (ou simplement P et I, si aucune confusion n'est à craindre) la composante asymétrique et la composante symétrique de R. La notation $xP(R)y$ (resp. $xI(R)y$) indique que x est strictement préféré à y (resp. que les deux options sont considérées comme équivalentes). La préférence d'un individu i dans N est représentée par un ordre linéaire p_i sur X. Pour une population composée de n votants, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, la donnée d'un ordre linéaire par individu définit un profil (de préférences individuelles), $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$. Un profil de taille n est donc un élément de $\mathcal{L}(X)^n$. L'ensemble de tous les profils possibles sur X lorsque la taille de la population prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{N}^*$, est l'ensemble $\mathcal{D}(X)$ défini par $\mathcal{D}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(X)^n$. Si π_1 et π_2 sont deux profils sur X correspondant à deux populations disjointes N_1 et N_2, la réunion des ces deux profils (définie comme une concaténation) sera notée $\pi_1 + \pi_2$. La notation $t\pi$ désignera le profil constitué de t répliques du profil π.

L'agrégation des préférences individuelles en une préférence collective peut avoir comme objectif le rangement (classement global) des options ou le choix (sélection) d'une ou de plusieurs options. Dans le premier cas, les règles de décision collective sont représentées par des fonction d'utilité sociale (FUS), c'est-à-dire par des fonctions définies sur $\mathcal{D}(X)$ à valeurs dans $\mathcal{R}(X)$. dans le second cas, ces règles sont décrites par des correspondance de choix social (CCS), c'est-à-dire par des fonctions définies sur $\mathcal{D}(X)$ à valeurs dans $2^X \setminus \{\emptyset\}$ (l'ensemble des parties non vides de X).

les méthodes d'agrégation sont souvent supposées vérifier les deux propriétés minimales de justice que sont la neutralité (ne favoriser aucun candidat) et d'anonymat (ne favoriser aucun votant). Pour donner les définitions mathématiques de ces deux conditions, nous introduisons les notations suivantes. Pour un ensemble fini, E, On désigne par $S(E)$ l'ensemble des permutations de E. Pour un préordre complet R dans $\mathcal{R}(X)$ et une permutation σ dans $S(X)$, nous désignerons par $\sigma(R)$ le préordre complet obtenu à partir de R en permutant les options selon σ : Si $a = \sigma(x)$ et $b = \sigma(y)$, alors $a\sigma(R)b \Leftrightarrow xRy$. Pour un profil π dans $\mathcal{D}(X)$, nous noterons $\sigma(\pi)$ le profil obtenu en remplaçant dans π chaque préférence individuelle p_i par son image $\sigma(p_i)$. Pour un profil π dans $\mathcal{L}(X)^n$ et une permutation σ dans $S(N)$, notons π_σ le profil résultant naturellement de π en renommant les éléments de N selon σ. Ainsi, si π est défini par $\pi = (p_i)_{(1 \leq i \leq n)}$, alors $\pi_\sigma = (p_{\sigma(i)})_{(1 \leq i \leq n)}$. La présentation formelle des conditions de neutralité et d'anonymat n'exige pas de distinguer le cas des FUS de celui des CCS. Nous regroupons désormais ces deux notions sous les termes de méthode d'agrégation ou de règle de décision.

Définition 1.1. Une méthode d'agrégation F est *neutre* si, pour tout profil π dans $\mathcal{D}(X)$ et pour toute permutation σ dans $S(X)$, $F(\sigma(\pi)) = \sigma(F(\pi))$.
Une méthode d'agrégation F est *anonyme* si pour tout profil π dans $\mathcal{L}(X)^n$ et pour toute permutation σ dans $S(N)$, $F(\pi_\sigma) = F(\pi)$.

Les règles positionnelles simples (RPS) constituent une famille importante de règles de décision collective. Le principe de fonctionnement de ces méthodes (de classement par points) consiste à associer à chaque option un score calculé sur la base des positions qu'elle occupe dans les ordres de préférences individuelles. Une RPS est définie via un vecteur score (ou vecteur points) $w = (w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ où w_r $(1 \leq r \leq m)$ est le nombre de points obtenus pour une $r^{ème}$ place. Pour un profil $\pi \in \mathcal{L}(X)^n$ et une option $x \in X$, notons $c_r(\pi, x)$ $(1 \leq r \leq m)$ le nombre de fois où x est classée $r^{ème}$ dans les ordres de préférences individuelles formant π. Le score de l'option x pour le vecteur points $w = (w_r)_{1 \leq r \leq m}$ et pour le profil π, noté $S_w(\pi, x)$, est alors défini par $S_w(\pi, x) = \sum_{r=1}^{m} w_r c_r(\pi, x)$.

Définition 1.2. Une FUS f définie sur $\mathcal{D}(X)$ est une *règle positionnelle simple* s'il existe un vecteur score $w \in \mathbb{R}^m$ tel que : $\forall \pi \in \mathcal{D}(X), \forall x, y \in X, xf(\pi)y \Leftrightarrow S_w(\pi, x) \geq S_w(\pi, y)$.
Une CCS g définie sur $\mathcal{D}(X)$ est une *règle positionnelle simple* s'il existe un vecteur score $w \in \mathbb{R}^m$ tel que : $\forall \pi \in \mathcal{D}(X), \forall x \in X, x \in g(\pi) \Leftrightarrow (\forall y \in X, S_w(\pi, x) \geq S_w(\pi, y))$

Les RPS les plus fréquemment utilisées sont les règle de la pluralité, de l'antipluralirié et de Borda. Elles sont associées respectivement aux vecteurs score $w_P = (1, 0, \cdots, 0)$, $w_A = (1, \cdots, 1, 0)$ et $w_B = (m-1, m-2, \cdots, 1, 0)$.

2 Les règles positionnelles itératives

Dans toute la suite, nous ne considérons que les règles positionnelles itératives définies par l'élimination séquentielle des options qui obtiennent les scores les plus faibles. Pour les décrire de façon formelle, nous introduisons les notations suivantes :

- Soit X un ensemble et R dans $\mathcal{R}(X)$ (l'ensemble des préordres complets sur X). Soit F et G deux parties de X, nous noterons :

$$\begin{aligned} &FRG \text{ si, } \forall x \in F, \forall y \in G, xRy \\ &FP(R)G \text{ si, } \forall x \in F, \forall y \in G, xP(R)y \\ &FI(R)G \text{ si, } \forall x \in F, \forall y \in G, xI(R)y \end{aligned}$$

- Soit $X_1, X_2, \cdots, X_s$ des parties de X, non vides et deux à deux disjointes. La notation $X_1 X_2 \cdots X_s$ désignera le préordre complet R défini sur $(\bigcup_{t=1}^{s} X_t)$ par $X_t I(R) X_t \ (t = 1, \cdots, s)$ et $X_{t-1} P(R) X_t \ (t = 2, \cdots, s)$

Dans les exemples que nous donnerons, nous utiliserons, aussi, la notation en colonne. Ainsi, le préordre $R = X_1 X_2 \cdots X_s$ peut être désigné par :

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_s \end{array}$$

Définition 2.1. Soit $(w(m), w(m-1), \cdots, w(2))$ une liste de $m-2$ vecteurs score tels que $w(k) \in \mathbb{R}^k$ $(k = m, \cdots, 2)$. La *règle positionnelle itérative* (RPI) associée à cette liste est la fonction d'utilité sociale f définie sur $\mathcal{D}(X)$ de la manière suivante :
Soit π un profil dans $\mathcal{D}(X)$ et $R = X_1 X_2 \cdots X_s$ un préordre complet sur X. Notons $E_t = X_1 \cup \cdots \cup X_t$ $(t = 1, \cdots, s)$. Alors $f(\pi) = R$ si et seulement si

1) $\forall x, y \in X_t, S_{w(|E_t|)}(\pi_{|E_t}, x) = S_{w(|E_t|)}(\pi_{|E_t}, y)$ (pour $t = 1, \cdots, s$).
2) $\forall x \in E_{t-1}, \forall y \in X_t, S_{w(|E_t|)}(\pi_{|E_t}, x) > S_{w(|E_t|)}(\pi_{|E_t}, y)$ (pour $t = 2, \cdots, s$).

Cette définition s'étend au cadre de sélection : Une CCS g est une règle positionnelle itérative s'il existe une FUS f telle que g est dérivée de f et f est une règle positionnelle itérative.

Remarque 2.1. Comme toutes les définitions proposées pour décrire les RPI, la définition 2.1 est assez délicate à manipuler car l'ordre dans lequel les options sont éliminées a une grande importance. Il est utile de faire les précisions suivantes :

1. Pour le préordre $R = X$ ($s = 1$ et $X_1 = X$), seule la première partie de la définition 2.1 a un sens. En effet, dans ce cas, nous avons $E_1 = X_1 = X$ et toutes les options ont le même score par l'application du vecteur $w(m)$. Il n'y a donc pas d'élimination, le processus s'arrête et toutes les options sont jugées équivalentes.
2. Soit π un profil et F, G deux parties de X non vides, disjointes et telles que $X = F \cup G$. Si l'on veut montrer que $Ff(\pi)G$, il faut utiliser la restriction du préordre complet $f(\pi)$ à la partie G. Soit $f(\pi)_{|G} = Y_1 \cdots Y_r$, où $Y_1, \cdots, Y_r$ sont des parties de X, non vides, deux à deux disjointes et vérifiant $G = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$. Pour tout j dans $\{1, \cdots, r\}$, posons $E_j = F \cup Y_1 \cdots \cup Y_j$. Pour établir la relation $Ff(\pi)G$, il faut alors prouver que :

$$\forall x, y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) = S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \quad (1 \leq j \leq r) \tag{1}$$

$$\forall x \in E_{j-1}, \forall y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) > S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \ \ (2 \leq j \leq r) \tag{2}$$

$$\forall x \in F, \forall y \in Y_1, S_{w(|E_1|)}(\pi_{|E_1}, x) \geq S_{w(|E_1|)}(\pi_{|E_1}, y) \tag{3}$$

   Les relations (1) et (2) servent à montrer qu'il n'y a que des éléments de G qui sont éliminés dans les premiers tours, plus précisément ceux de $Y_2 \cup \cdots \cup Y_s$. La relation (3) permet de voir que les éléments de F sont, pour $f(\pi)$, tous au moins aussi bons que ceux de Y_1. Il s'en suit alors que toute option de F est au moins aussi bonne que toute option de G. Là encore, seules les relations (1) et (3) ont un sens lorsque $f(\pi)_{|G} = Y_1$.
3. Avec les mêmes notations, pour établir la relation $FP(f(\pi))G$, il faut montrer que :

$$\forall x, y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) = S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \quad (1 \leq j \leq r) \tag{1}$$

$$\forall x \in E_{j-1}, \forall y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) > S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \ \ (2 \leq j \leq r) \tag{2}$$

$$\forall x \in F, \forall y \in Y_1, S_{w(|E_1|)}(\pi_{|E_1}, x) > S_{w(|E_1|)}(\pi_{|E_1}, y) \tag{3}$$

   La dernière relation montre que les options de F sont toutes strictement préférées aux options de Y_1, et donc à celles de G.
4. Pour montrer qu'une option x est au moins aussi bonne qu'une option y (resp. strictement préférée à une option y), il faut trouver deux parties F et G (non vides et disjointes) telles que $X = FUG$, $x \in F$, $y \in G$ et $Ff(\pi)G$ (resp. $FP(f(\pi))G$).

Notons que les vecteur points, $w(k)$ ($k = m, \cdots, 2$), utilisés par une RPI, sont généralement supposés décisifs (non constants) et monotones ($w_1(k) > w_k(k)$ et $w_i(k) \geq w_{i+1}(k)$ pour $i = 1, \cdots, k-1$).
La définition 2.1 autorise toutes les combinaisons de vecteurs score. Par exemple, pour un ensemble de quatre candidats, on peut définir une RPI à partir des trois vecteurs $w(4) = (7, 2, 0, 0)$, $w(3) = (2, 1, 0)$ et $w(2) = (1, 0)$. Cependant, les RPI les plus courantes correspondent à l'itération de la « même » RPS :

- La règle de *la pluralité itérative* [2], définie par la liste de vecteurs :

$$w(k) = (1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{\text{(k-1) fois}}) \quad (k = m, \cdots, 2)$$

- La règle de l'*antipluralité itérative*, connue aussi sous le nom de *règle de Coombs* [1]. Les vecteurs score utilisés sont :

$$w(k) = (\overbrace{1, \cdots, 1}^{\text{(k-1) fois}}, 0) \quad (k = m, \cdots, 2)$$

2. Cette règle est, parfois, improprement attribuée à Hare : la règle de Hare [6] a été proposée pour choisir une assemblée, et non pas pour classer les candidats ou obtenir un ensemble de vainqueurs.

- La règle de *Borda itérative*, le vecteur score de Borda est utilisée à chaque étape d'élimination :

$$w(k) = (k-1, k-2, \cdots, 1, 0) \quad (k = m, \cdots, 2)$$

Il est à noter que cette dernière règle, qui fera l'objet du résultat de cette étude, diffère quelque peu de la méthode proposée par Nanson [12].

2.1 Exemples

Exemple 2.1. $m = 4$ et $n = 10$.

$$\pi : \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & b & c & d \\ b & d & d & c \\ c & c & b & a \\ d & a & a & b \end{array}$$

Appliquons la règle de la pluralité itérative. Au premier tour, les scores (obtenus en utilisant le vecteur $w_P(4) = (1, 0, 0, 0)$) sont :
$S_{w_P(4)}(\pi, a) = 4$, $S_{w_P(4)}(\pi, b) = 3$, $S_{w_P(4)}(\pi, c) = 2$, $S_{w_P(4)}(\pi, d) = 1$
En éliminant l'option d qui a le plus mauvais score, et en restreignant le profil π à l'ensemble des options restantes $E_3 = \{a, b, c\}$, on obtient :

$$\pi_{|E_3} : \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & b & c & c \\ b & c & b & a \\ c & a & a & b \end{array}$$

Les nouveaux scores sont :
$S_{w_P(3)}(\pi_{|E_3}, a) = 4$, $S_{w_P(3)}(\pi_{|E_3}, b) = 3$, $S_{w_P(3)}(\pi_{|E_3}, c) = 3$
Les options b et c seront donc éliminées et le résultat de la pluralité itérative, pour le profil π, est donc le préordre R défini par $R = \{a\}\{b, c\}\{d\}$. En utilisant la notation en colonne, ce résultat s'écrit :

$$R = \begin{array}{c} a \\ b\,c \\ d \end{array}$$

Appliquons la règle de Borda itérative. Au premier tour, les scores (obtenus en utilisant le vecteur $w_B(4) = (3, 2, 1, 0)$) sont :
$S_{w_B}(\pi, a) = 13$, $S_{w_B}(\pi, b) = 19$, $S_{w_B}(\pi, c) = 15$, $S_{w_B}(\pi, d) = 13$
En éliminant les option a et d, et en restreignant le profil π à l'ensemble des options restantes $E_2 = \{b, c\}$, on obtient :

$$\pi_{|E_2} : \begin{array}{cc} 7 & 3 \\ b & c \\ c & b \end{array}$$

L'option c sera donc éliminée et le résultat de la règle de Borda itérative, pour le profil π, est donc représenté par le préorde complet $R' = \{b\}\{c\}\{a, d\}$
De la même manière, on peut vérifier que le résultat associé par la règle de l'antipluralité itérative au profil π est le préordre $R'' = \{b\}\{c\}\{d\}\{a\}$.

Notons que la règle de Nanson, appliquée à cet exemple, donne le même classement que la règle de Borda itérative. En effet, le score de Borda moyen, pour le profil π, est de 15 points (4 candidats et 10 votants). Les option a et d, dont les scores sont inférieurs à cette moyenne, seront éliminées au premier tour, et l'option c sera éliminée en restreignant le profil.
L'exemple suivant montre que ces deux règles peuvent produire des résultats très différents.

Exemple 2.2. $m = 4$ et $n = 13$

$$\pi : \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ a & a & a & c & d & b \\ b & d & c & d & b & a \\ d & c & b & b & a & c \\ c & b & d & a & c & d \end{array}$$

Le total des points distribués, par la règle de Borda, pour ce profil est $13 \times (3 + 2 + 1) = 78$, le score de Borda moyen est donc $19,5$ points. Les scores de Borda sont :
$S_{w_B}(\pi, a) = 24$, $S_{w_B}(\pi, b) = 19$, $S_{w_B}(\pi, c) = 17$, $S_{w_B}(\pi, d) = 18$
Les options b, c et d ont donc des scores inférieurs à la moyenne. En les éliminant, il ne reste plus que l'option a. Le résultat de la règle de Nanson est donc $\{a\}\{b, c, d\}$. Appliquons maintenant la règle de Borda itérative. Seule l'option c, qui a le score le plus faible, sera éliminée au premier tour. En restreignant le profil π à l'ensemble $E_3 = \{a, b, d\}$, on obtient :

$$\pi_{|E_3} : \begin{array}{cccc} 4 & 2 & 5 & 2 \\ a & a & d & b \\ b & d & b & a \\ d & b & a & d \end{array}$$

Les nouveaux scores de Borda sont :
$S_{w_{B(3)}}(\pi_{|E_3}, a) = 14$, $S_{w_{B(3)}}(\pi_{|E_3}, b) = 13$, $S_{w_{B(3)}}(\pi_{|E_3}, d) = 12$
En éliminant l'option d, qui a le plus mauvais score, on obtient (avec $E_2 = \{a, b\}$) :

$$\pi_{|E_2} : \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ a & b \\ b & a \end{array}$$

L'option a est éliminée par l'application du vecteur $w_B(2) = (1, 0)$. Le résultat de la règle de Borda itérative, pour π, est donc le préordre $\{b\}\{a\}\{d\}\{c\}$.

Remarquons que cet exemple montre que la règle de Nanson et la règle de Borda sont différentes en tant que FUS (classements collectifs différents) et en tant que CCS (a est le vainqueur de la règle de Nanson, alors que b est élu par la règle de Borda itérative).

2.2 Quelques propriétés

L'intérêt principal des règles positionnelles itératives est leur aptitude, tout en étant des méthodes à scores, à répondre favorablement aux (versions faibles des) critères majoritaires. En effet, le processus d'élimination séquentielle permet d'améliorer significativement les performances majoritaires des règles positionnelles. Pour s'en convaincre, rappelons le comportement des règles positionnelles simples face aux conditions majoritaires :

1. Aucune RPS ne vérifie le critère de Condorcet.

2. La règle de Borda est la seule RPS qui vérifie la condition (PC) (ne pas élire le perdant de Condorcet).
3. La règle de la pluralité est la seule RPS qui vérifie la condition (VC^-) (élire l'option fortement majoritaire).
4. Une RPS monotone définie à partir d'un vecteur score normalisé $w \in \mathbb{R}^m$, vérifie la condition (PC^-) (ne pas élire l'option fortement minoritaire) si et seulement si, $\sum_{i=1}^m w_i \geq \frac{m}{2}$.

En contraste avec ses performances, pour le moins faibles, nous avons les résultats suivants :

1. La règle de Borda itérative vérifie le critère de Condorcet. Cependant, cette règle est la seule RPI à vérifier cette condition (voir [19]).
   Le même résultat reste valable, dans un contexte d'élimination par la moyenne, pour la règle de Nanson.
2. Toutes les RPI vérifient la condition (PC).
3. Une RPI, associée aux vecteurs score normalisés $(w(m), w(m-1), \cdots, w(2))$, vérifie la condition ($\mathrm{VC}^-$) si et seulement si :
   $\forall k \in \{2, \cdots, m\}, \sum_{j=1}^k w_j(k) \leq \frac{k}{2}$ (voir [8]).
4. Toutes les RPI vérifient la condition (PC^-).

La condition (PC^-) étant plus faible que la condition (PC), la dernière assertion est une conséquence de l'assertion 2. Pour voir que le perdant de Condorcet ne peut être choisi par aucune RPI, il suffit de remarquer que même si cette option parvient à passer les premières étapes, elle sera éliminée lors du duel majoritaire du dernier tour.
Comme on peut le constater, à travers cette comparaison, moins de critères majoritaires sont satisfaits par une règle positionnelle simple que par sa version itérative. Ce résultat théorique a été complété par des études probabilistes qui montrent que les RPI ont une plus grande efficacité majoritaire que les RPS : elles ont une plus faible propension à violer les critères majoritaires ([9]).

Confrontées à d'autres conditions normatives, les règles positionnelles séquentielles présentent des comportements moins satisfaisants. Par exemple, Lepelley [8] et Saari [15] ont montré qu'aucune règle positionnelle itérative ne vérifie la condition de participation. Smith [19] a fait remarquer que toutes les RPI violent la condition de monotonie. Ainsi, une option gagnante peut ne plus être classée première (ou exclue de l'ensemble de choix collectif, dans le cas des CCS) après avoir gagner des rangs dans les préférences individuelles [3]. En considérant la version stricte de l'axiome de monotonie, Durand [3, 2] a étendu le résultat de Smith à toutes les FUS définies par l'itération d'une CCS strictement monotone et qui n'est pas forcement une règle positionnelle simple.

L'incapacité des RPI à rendre compte de l'amélioration de la position d'un candidat dans les préférences individuelles est l'un des défauts majeurs de cette classe de règles de décision. Le non respect des conditions de renforcement (consistance, séparabilité) constitue un deuxième argument en défaveur de l'utilisation itérative des règles positionnelles simples. En effet, les caractérisions de Smith et de Young de la famille des RPI montrent que les règles positionnelles simples (ou composées) sont les seules FUS (resp. CCS) neutres et anonymes qui vérifient la propriété de séparabilité (resp. de consistance). Par conséquent, aucune RPI ne peut répondre favorablement aux axiomes de renforcement. Dans ce qui suit, nous nous proposons de relativiser la portée de ce défaut en montrant qu'une forme « globale » de la condition de séparabilité est respectée par les règles positionnelles itératives.

3. Le comportement des RPI face à d'autres formes de la condition de monotonie, est étudié dans la thèse de Merlin [10].

3 Séparabilité des règles positionnelles itératives

Cette section sera consacrée essentiellement à la présentation de la propriété de *séparabilité globale*. Nous montrerons que toutes les règles itératives, définies en tant que fonctions d'utilité sociale, satisfont à cette nouvelle condition de renforcement. Cette propriété sera ensuite utilisée pour proposer une caractérisation de la règle de Borda itérative.

3.1 Les extensions des conditions de renforcement

Les conditions de consistance et de séparabilité, telles qu'elles sont définies par Smith et Young, excluent toutes les méthodes d'agrégation (neutres et anonymes) autres que les règles positionnelles simples ou composées. Il est cependant possible, par un affaiblissement de ces conditions ou par une modification du cadre formel, d'étendre l'idée de renforcement à des classes plus vastes de méthodes de décision contenant toujours les règles positionnelles simples. Nous avons déjà mentionné le théorème de Myerson ([11]) qui permet, dans le cadre des systèmes de vote abstraits, de regrouper dans une même famille les RPS et des méthodes à scores telles que le vote par approbation [4]. Nous notons que les règles positionnelles itératives ne vérifient pas la condition de renforcement de Myerson et sont donc exclues de la classe des systèmes positionnels abstraits, caractérisée par cette propriété.
Saari [16] a pu définir et caractériser, dans le cas de trois options, une autre extension de la classe des RPS, en proposant une version faible de l'axiome de consistance.

Définition 3.1. Une CCS g vérifie la condition de *consistante faible* si pour tous profils π, π' dans $\mathcal{D}(X)$, $g(\pi) = g(\pi') \Rightarrow g(\pi + \pi') = g(\pi) = g(\pi')$.

Les règles de décision (neutres et anonymes) qui vérifient cette propriété forment la classe des *règles positionnelles généralisées*. Ces règles sont très lourdes à définir et Saari lui même n'en donne la description complète que dans le cas de trois options [5]. Nous nous limiterons à signaler que les règles positionnelles itératives, définies en tant que CCS, ne satisfont pas à la condition de consistance faible et ne font donc pas partie de la famille des règles positionnelles généralisées.

À notre connaissance, la thèse de Merlin [10] contient la seule étude qui s'est directement intéressée à définir une condition de renforcement que pourraient vérifier les règles positionnelles séquentielles. La propriété proposée par Merlin est un affaiblissement d'une condition de renforcement que Young et Levenglick [21] ont utilisée pour caractériser *la règle de Kemeny*. Cette règle n'étant ni une FUS ni une CCS, Young et Levenglick ont introduit un nouveau cadre d'analyse, celui des *correspondances de préférences collectives* .

Définition 3.2. Soit X un ensemble d'options et soit $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des ordres linéaires sur X. Une *correspondance de préférences collectives* (CPC) sur X est une fonction de $\mathcal{D}(X)$ dans $2^{\mathcal{L}(X)} \setminus \{\emptyset\}$.

Une CPC est donc une fonction qui à chaque profil de préférences individuelles associe un ensemble d'ordres linéaires sur X, c'est-à-dire une partie non vide de $\mathcal{L}(X)$. La règle de Kemeny est une CPC définie à partir d'une notion de distance basée sur les comparaisons par paires : la distance entre deux ordres linéaires L et L' est le nombre de fois où deux options ne sont pas classées de la même manière dans L et dans L'. La distance entre un ordre linéaire L et un profil π est la somme des distances entre L et les ordres linéaires formant π. Le résultat collectif, associé par la règle de Kemeny au profil π, est alors défini par l'ensemble des ordres linéaires dont la distance à π est minimale. La caractérisation de cette règle repose sur une adaptation de l'axiome de consistance de Young au cadre de correspondances de préférences collectives.

4. Pour des caractérisations de la règle de vote par approbation, voir [4, 5, 18].
5. Pour une définition exacte des règles positionnelles généralisées, dans le cas de trois options, voir [16, 17].

Définition 3.3. Une CPC h définie sur $\mathcal{D}(X)$ vérifie la *condition de renforcement de Young et Levenglick* si, pour tous profils π et π' :

$$h(\pi) \cap h(\pi') \neq \emptyset \Rightarrow h(\pi + \pi') = h(\pi) \cap h(\pi')$$

Cette définition est la traduction fidèle de l'axiome de consistance en termes de correspondances de préférences collectives : lorsque deux populations différentes choisissent, avec la même CPC, des ordres linéaires communs, ces classements sont les seuls qui doivent figurer dans le résultat collectif associé à la réunion des deux populations. Merlin [10] a constaté qu'une version faible de cette propriété était vérifiée par les RPI, définies en tant que correspondances de préférences collectives. Avant de présenter la condition de renforcement proposée par Merlin, il faut expliquer comment adapter le processus d'élimination séquentielle au cadre des CPC. Il suffit de modifier ce mécanisme pour traiter différemment les situations d'ex æquo : à chaque étape, au lieu d'éliminer simultanément toutes les options qui obtiennent les scores les plus faibles, on considère tous les cas qui résultent de l'élimination de l'une seulement de ces options. L'exemple suivant nous permettra d'éviter une longue définition formelle, inutile à notre propos.

Exemple 3.1. Soit $X = \{a, b, c, d\}$ et soit h la règle positionnelle itérative définie, en tant que CPC, à partir des vecteurs score de la pluralité. Soit π le profil suivant :

$$\pi : \begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & c & d & c \\ b & d & d & c & a \\ c & c & b & a & d \\ d & a & a & b & b \end{array}$$

Les options c et d ont les scores les plus bas. Au lieu de les éliminer toutes les deux, on considère deux cas suivants :

- Si c est éliminé, le profil restreint à $\{a, b, d\}$ est :

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & d & d & a \\ b & d & b & a & d \\ d & a & a & b & b \end{array}$$

  Les options b et d obtiennent les scores les plus faibles. À nouveau, il y a deux cas. On vérifie que si b est éliminé, d l'emporte devant a et que si d est éliminé, c'est a qui gagne devant b. Ce premier cas (l'élimination de c au premier tour) donne donc lieu à deux ordres collectifs possibles : $dabc$ et $abdc$.
- De la même façon, on vérifie que l'élimination de d à la première étape crée un seul ordre collectif : $cabd$.

Le résultat collectif associé par h au profil π est donc $h(\pi) = \{dabc, abdc, cabd\}$

En constatant que les règles positionnelles itératives, définies en tant que CPC, ne vérifient pas la condition de renforcement de Young et Levenglick, Merlin propose la propriété suivante.

Définition 3.4. Une correspondance de préférences collectives définie sur $\mathcal{D}(X)$ vérifie la condition de *renforcement inclusif* si, pour tous profils π et π' :

$$h(\pi) \subseteq h(\pi') \Rightarrow h(\pi + \pi') = h(\pi)$$

On montre sans peine que toutes les règles positionnelles itératives, définies comme dans l'exemple précèdent, satisfont à la condition de renforcement inclusif (voir Merlin [10]). Notons aussi que cette propriété, plus faible que l'axiome de renforcement de Young et Levenglick, est vérifiée par d'autres méthodes de décision telles que la règle de Kemeny et les règles positionnelles simples (définies en tant que CPC).

Ainsi, le cadre des correspondances de préférences collectives a permis à Merlin de proposer une condition normative qui tient compte d'une certaine forme de consistance vérifiée par les règles positionnelles itératives. Cependant, ce cadre d'analyse est très peu utilisé en théorie du choix social et les notions de CPC et de FUS ne coïncident que dans les cas où le processus d'élimination séquentielle ne présente pas de situations d'ex æquo [6]. La condition de renforcement inclusif, très intuitive dans le contexte des CPC, ne donne donc pas d'indication précise sur le « degré de séparabilité » que pourraient vérifier les RPI lorsque ces règles sont définies comme étant des fonctions d'utilité sociale. Dans la sous-section suivante, nous proposons une nouvelle condition de séparabilité, compatible avec le cadre des FUS et vérifiée par toutes les règles positionnelles itératives.

3.2 La condition de séparabilité globale

Nous commençons par examiner les raisons pour lesquelles les RPI violent l'axiome de séparabilité au sens de Smith. Selon cette propriété, une FUS f est séparable si pour tous π, π' dans $\mathcal{D}(X)$ et pour tous x, y dans X,

1. $(xf(\pi)y$ et $xf(\pi')y) \Rightarrow xf(\pi+\pi')y$
2. $(xf(\pi)y$ et $xP(f(\pi'))y) \Rightarrow xP(f(\pi+\pi'))y$

Cette condition véhicule une certaine notion d'indépendance. En effet, les classements relatifs de x et y par rapport aux autres options, dans les préférences collectives associées à π et à π', n'interviennent pas dans cette définition. Par exemple, pour $X = \{x, y, z\}$, $f(\pi) = x \succ y \succ z$ et $f(\pi') = x \succ z \succ y$, nous devons avoir $xP(f(\pi+\pi'))y$. Cette conclusion est indépendante du fait que y soit préféré à z dans $f(\pi)$ et que z soit préféré à y dans $f(\pi')$. Les règles positionnelles simples, basées sur les comparaisons directes des scores, respectent cette notion d'indépendance. En revanche, les règles positionnelles itératives obéissent à une logique différente et les informations $xP(f(\pi))y$ et $xP(f(\pi'))y$ ne suffisent pas pour conclure que x est préféré à y lorsque les profils π et π' sont réunis.

Exemple 3.2. Soit f la règle de la pluralité itérative. Considérons les deux profils suivants :

$$\pi : \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ x & y \\ y & z \\ z & x \end{array} \qquad\qquad \pi' : \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{array}$$

Les scores au premier tour sont :
$S_{w_P(3)}(\pi, x) = 4$, $S_{w_P(3)}(\pi, y) = 3$, $S_{w_P(3)}(\pi, z) = 0$.
$S_{w_P(3)}(\pi', x) = 3$, $S_{w_P(3)}(\pi', y) = 2$, $S_{w_P(3)}(\pi', z) = 3$.

Pour le profil π, l'option z est éliminée à la première étape et x gagne le duel contre y au deuxième tour. Par contre, c'est l'option y qui est éliminée la première dans le profil π', x l'emporte ensuite contre z. Cette différence dans les résultats de la première étape conduit à un deuxième tour très différent dans le profil

6. Merlin [10] relativise les différences entre le cadre des CPC et celui des FUS : avec une population de grande taille et un nombre limité de candidats, la probabilité d'avoir des ex æquo est très faible.

$\pi + \pi'$. En effet, nous avons :
$S_{w_{P(3)}}(\pi + \pi', x) = 7$, $S_{w_{P(3)}}(\pi + \pi', y) = 5$, $S_{w_{P(3)}}(\pi + \pi', z) = 3$.

En éliminant z du profil $\pi + \pi'$, on constate que l'application du vecteur $(1, 0)$ au profil restreint à $\{x, y\}$ donne 7 points à x et 8 points à y. C'est donc l'option y (et non pas x) qui est choisie comme vainqueur pour le profil $\pi + \pi'$. En résumé, nous avons :

$$f(\pi) = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \qquad f(\pi') = \begin{array}{c} x \\ z \\ y \end{array} \qquad f(\pi + \pi') = \begin{array}{c} y \\ x \\ z \end{array}$$

Comme nous pouvons le voir à l'aide de cet exemple, le viol de la condition de séparabilité de Smith intervient dans des situations où l'ordre des éliminations des candidats n'est pas le même dans les profils π et π'. Cette constatation permet de proposer un premier affaiblissement de cette propriété.

Définition 3.5. Une FUS f vérifie la condition de *séparabilité faible* si pour tous profils π, π' dans $\mathcal{D}(X)$, $f(\pi) = f(\pi') \Rightarrow f(\pi + \pi') = f(\pi) = f(\pi')$.

Cette condition n'est autre que l'adaptation de la condition de consistance faible de Saari au cas des fonctions d'utilité sociale. Les règles positionnelles itératives, définies en tant que CCS, ne satisfont pas à la condition de consistance faible car cette propriété n'utilise pas l'information sur l'ordre dans lequel les options sont éliminées. Ainsi, dans l'exemple 3.2, la règle de la pluralité itérative (considérée comme CCS) choisit x comme unique option gagnante pour les profils π et π', mais permet à y d'être le vainqueur pour le profil $\pi + \pi'$. En revanche, la condition de séparabilité faible, qui exige que l'ordre des éliminations des candidats soit le même dans π et π', est vérifiée par toutes les règles positionnelles itératives. En effet, à chaque étape d'élimination, les options qui obtiennent les scores les plus faibles sont les mêmes dans π et dans π'. Par la linéarité des scores, ces mêmes options obtiennent un nombre de points minimal dans le profil $\pi + \pi'$.

La propriété de *séparabilité globale*, que nous présentons maintenant, étend la définition 3.5 à des situations qui ne sont pas prises en considération par la notion de séparabilité faible. Pour présenter formellement cette nouvelle condition, nous aurons besoin de la notation suivante :
Soit X un ensemble et soit R_1, R_2 deux préordres complets sur X. Pour deux parties F et G de X, la notation $FP[R_1, R_2]G$ signifiera que pour tout x dans F et pour tout y dans G, $xP(R_1)y$ ou $xP(R_2)y$.

Définition 3.6. Une fonction d'utilité sociale f, définie sur $\mathcal{D}(X)$, vérifie la condition de *séparabilité globale* (SG) si, pour tous profils π_1, π_2 dans $\mathcal{D}(X)$ et pour toutes parties F et G de X telles que $FUG = X$ et $F \cap G = \emptyset$, nous avons :

1. Si $Ff(\pi_1)G$, $Ff(\pi_2)G$ et $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$, alors $Ff(\pi_1 + \pi_2)G$.
2. Si ($Ff(\pi_1)G$, $Ff(\pi_2)G$, $FP[f(\pi_1), f(\pi_2)]G$ et $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$), alors $FP(f(\pi_1 + \pi_2))G$.

Comparée à l'axiome de séparabilité, qui peut être regardé comme une propriété de cohérence locale, la condition de séparabilité globale correspond à une exigence de stabilité de la « forme générale » du classement collectif. Supposons que les candidats appartenant un groupe G sont classés de la même manière dans les préférences collectives de deux populations distinctes. Si tous les autres candidats sont considérés, par les deux populations, comme étant au moins aussi bons que les candidats de G, cette opinion doit être celle de l'union des deux populations. Si, de plus, chaque élément extérieur à G est strictement préféré, dans (au moins) l'une des deux préférences collectives, à tous les candidats de G, ces derniers doivent être les seuls à occuper les rangs inférieurs dans le classent collectif associé à l'union des deux populations.

Exemple 3.3. Soit f une fonction d'utilité sociale définie pour un ensemble de six options, $X = \{x, y, z, t, u, v\}$. Soit π_1, π_2 deux profils tels que :

$$f(\pi_1) = \begin{array}{c} z \\ x\ y\ u\ t \\ v \end{array} \qquad\qquad f(\pi_1) = \begin{array}{c} x\ u \\ y\ z\ t \\ v \end{array}$$

Nous avons :

$$\{x, z, u\}f(\pi_1)\{y, t, v\},\ \{x, z, u\}f(\pi_2)\{y, t, v\} \text{ et } f(\pi_1)_{|\{y,t,v\}} = f(\pi_2)_{|\{y,t,v\}}$$

Si f vérifie la condition de séparabilité globale, en appliquant la première partie de la définition 3.6 (avec $F = \{x, z, u\}$ et $G = \{y, t, v\}$), on doit avoir :

$$\{x, z, u\}f(\pi_1 + \pi_2)\{y, t, v\}$$

Nous avons aussi $\{x, z, u\}P[f(\pi_1), f(\pi_2)]\{y, t, v\}$ car :

$$\{x\}P(f(\pi_2))\{y, t, v\},\ \{z\}P(f(\pi_1))\{y, t, v\} \text{ et } \{u\}P(f(\pi_2))\{y, t, v\}$$

Par la deuxième partie de la définition de la séparabilité globale, on obtient :

$$\{x, z, u\}P(f(\pi_1 + \pi_2))\{y, t, v\}$$

De la même manière, on peut montrer que si f est globalement séparable, alors :

$$\{x, y, z, u, t\}P(f(\pi_1 + \pi_2))\{v\}$$

Notons que l'hypothèse $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$ est nécessaire dans la définition de la séparabilité globale, si l'on souhaite que cette condition soit vérifiée par toutes les RPI.

Exemple 3.4. Soit π_1, π_2 deux profils sur $X = \{x, y, z\}$ tels que :

$$\pi_1 : \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ x & y \\ y & z \\ z & x \end{array} \qquad\qquad \pi_2 : \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{array}$$

Soit f la règle de Borda itérative. On vérifie facilement que :

$$f(\pi_1) = \begin{array}{c} y \\ x \\ z \end{array} \qquad f(\pi_2) = \ x\ y\ z \qquad f(\pi_1 + \pi_2) = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Ainsi, nous avons :

$$\{y\}f(\pi_1)\{x, z\},\ \{y\}f(\pi_2)\{x, z\} \text{ et } \{y\}P[f(\pi_1), f(\pi_2)]\{x, z\}$$

Mais l'hypothèse $f(\pi_1)_{|\{x,z\}} = f(\pi_2)_{|\{x,z\}}$ n'est pas vérifiée car :

$$f(\pi_1)_{|\{x,z\}} = \begin{array}{c} x \\ z \end{array} \qquad\qquad f(\pi_2)_{|\{x,z\}} = \ x\ z$$

C'est pour cette raison que nous n'avons pas la conclusion $\{y\}P(f(\pi_1 + \pi_2))\{x, z\}$.

Proposition 3.1. *1. Toute FUS séparable (au sens de Smith) est globalement séparable.*

2. Toute FUS globalement séparable est faiblement séparable.

Preuve. 1. Soit f une FUS séparable. Soit π_1, π_2 deux profils dans $\mathcal{D}(X)$ et F, G deux parties formant une partition de X.
Supposons $Ff(\pi_1)G$, $Ff(\pi_2)G$ et $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$. Pour tout x dans F et tout y dans G, on a $xf(\pi_1)y$ et $xf(\pi_2)y$. Par la première partie de la définition de la séparabilité, on obtient $xf(\pi_1+\pi_2)y$. D'où $Ff(\pi_1+\pi_2)G$.
Supposons $Ff(\pi_1)G$, $Ff(\pi_2)G$, $FP[f(\pi_1), f(\pi_2)]G$ et $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$. Pour tout x dans F et tout y dans G, on a $xf(\pi_1)y$, $xf(\pi_2)y$ et ($xP(f(\pi_1))y$ ou $xP(f(\pi_2))y$). D'après la deuxième partie de la définition de la séparabilité, nous devons avoir $xP(f(\pi_1+\pi_2))y$. D'où $FP(f(\pi_1+\pi_2))G$. La FUS f est donc globalement séparable.
Notons que l'hypothèse $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$ n'a pas été utilisée pour établir la séparabilité globale de f. Nous reviendrons sur ce point à la fin de la preuve.
2. Soit f une FUS globalement séparable. Soit π_1 et π_2 deux profils dans $\mathcal{D}(X)$ tels que $f(\pi_1) = f(\pi_2)$. Nous allons montrer que $f(\pi_1+\pi_2) = f(\pi_1) = f(\pi_2)$. Soit x et y dans X tels que $xf(\pi_1)y$ (et donc $xf(\pi_2)y$). Posons :

$$F = \{z \in X : zP(f(\pi_1))y\} \cup \{x\}$$
$$G = \{z \in X : yf(\pi_1)z\} \setminus \{x\}$$

Nous avons $F \neq \emptyset$ (F contient x) et $G \neq \emptyset$ (G contient y). De plus, $F \cap G = \emptyset$ (tout z dans $F \setminus \{x\}$ vérifie $zP(f(\pi_1))y$, tout z dans G vérifie $yf(\pi_1)z$, et $x \notin G$) et $F \cup G = X$ ($x \in F$ et pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, ou bien $zP(f(\pi_1))y$ ou bien $yf(\pi_1)z$). Ainsi, les ensembles F et G forment une partition de X. D'autre part, nous avons $Ff(\pi_1)G$ (par définition de F et G, et par la transitivité de $f(\pi_1)$) et par conséquent $Ff(\pi_2)G$ (car $f(\pi_1) = f(\pi_2)$). Naturellement, nous avons aussi $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$ ($f(\pi_1) = f(\pi_2)$). D'après la première partie de la définition de la consistance globale, nous avons $Ff(\pi_1+\pi_2)G$. Comme x appartient à F et y appartient à G, on a $xf(\pi_1+\pi_2)y$.
De la même manière, on montre que si $xP(f(\pi_1))y$ (et donc $xP(f(\pi_2))y$), alors $xP(f(\pi_1+\pi_2))y$: il suffit d'appliquer la deuxième partie de la définition de la séparabilité globale avec $F = \{z \in X : zP(f(\pi_1))y\}$ et $G = \{z \in X : yf(\pi_1)z\}$. $\square$

Nous avons constaté, au cours de cette preuve, que lorsque la FUS f est séparable, nous obtenons les deux conclusions exigées par la définition de la séparabilité globale, sans utiliser l'hypothèse $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$. Cette remarque suggère l'existence d'une version forte de la condition de séparabilité globale, vérifiée par toutes les FUS séparables. La formulation de cette propriété, intermédiaire entre la séparabilité et la séparabilité globale, s'obtient en supprimant l'hypothèse $f(\pi_1)_{|G} = f(\pi_2)_{|G}$ de la définition 3.6. Nous savons cependant, par l'exemple 3.4, que cette propriété n'est pas vérifiée par les règles positionnelles itératives. Nous maintenons donc cette hypothèse dans la définition de la séparabilité globale.

Proposition 3.2. *Toutes les règles positionnelles itératives sont globalement séparables.*

Preuve. Soit f une RPI définie par les vecteurs score $w(m), w(m-1), \cdots, w(2)$. Soit π, π' deux profils dans $\mathcal{D}(X)$ et F, G deux parties non vides de X telles que $FUG = X$ et $F \cap G = \emptyset$.
Supposons que :

$$Ff(\pi)G \tag{1}$$
$$Ff(\pi')G \tag{2}$$
$$f(\pi)_{|G} = f(\pi')_{|G} \tag{3}$$

Nous allons montrer que $Ff(\pi + \pi')G$. L'égalité (3) peut s'écrire :

$$f(\pi)_{|G} = f(\pi')_{|G} = Y_1 \cdots Y_r \tag{3'}$$

où $Y_1, \cdots, Y_r$ sont des parties de X, non vides, deux à deux disjointes et vérifiant :

$$G = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$$

Pour tout j dans $\{1, \cdots, r\}$, posons :

$$E_j = F \cup Y_1 \cdots \cup Y_j$$

D'après la remarque 2.1 (deuxième point), la conjonction de (1) et (2) s'écrit :

$$\forall x, y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) = S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \quad (j = 1, \cdots, r) \tag{4}$$
$$\forall x, y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi'_{|E_j}, x) = S_{w(|E_j|)}(\pi'_{|E_j}, y) \quad (j = 1, \cdots, r) \tag{5}$$
$$\forall x \in E_{j-1}, \forall y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) > S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \quad (j = 2, \cdots, r) \tag{6}$$
$$\forall x \in E_{j-1}, \forall y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, x) > S_{w(|E_j|)}(\pi_{|E_j}, y) \quad (j = 2, \cdots, r) \tag{7}$$
$$\forall x \in F, \forall y \in Y_1, S_{w(|E_1|)}(\pi_{|E_1}, x) \geq S_{w(|E_1|)}(\pi_{|E_1}, y) \tag{8}$$
$$\forall x \in F, \forall y \in Y_1, S_{w(|E_1|)}(\pi'_{|E_1}, x) \geq S_{w(|E_1|)}(\pi'_{|E_1}, y) \tag{9}$$

En utilisant la linéarité des scores dans les additions (4)+(5),(6)+ (7) ,(8)+ (9), on obtient :

$$\forall x, y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}((\pi + \pi')_{|E_j}, x) = S_{w(|E_j|)}((\pi + \pi')_{|E_j}, y) \quad (j = 1, \cdots, r)$$
$$\forall x \in E_{j-1}, \forall y \in Y_j, S_{w(|E_j|)}((\pi + \pi')_{|E_j}, x) > S_{w(|E_j|)}((\pi + \pi')_{|E_j}, y) \quad (j = 2, \cdots, r)$$
$$\forall x \in F, \forall y \in Y_1, S_{w(|E_1|)}((\pi + \pi')_{|E_1}, x) \geq S_{w(|E_1|)}((\pi + \pi')_{|E_1}, y)$$

Ces trois relations montrent que $Ff(\pi + \pi')G$.
La deuxième partie de la condition de la séparabilité globale se démontre de manière similaire en utilisant le troisième point de la remarque 2.1. □

Évidement, La proposition précédente ne donne pas la description de toutes les règles de décision globalement séparables. La caractérisation de cette famille de règles s'avère être un problème assez difficile à traiter, nous ne l'abordons pas dans le cadre de ce travail. Nous nous limitons ici à noter que d'après la proposition 3.1, les règles positionnelles simples vérifient aussi la condition (SG). Il n'est pas difficile de voir que lorsque les RPI sont définies à partir d'un processus d'élimination par la moyenne, elles restent globalement séparables. Dans l'exemple suivant, nous expliquons brièvement pourquoi la règle de Nanson vérifie la condition (SG) et nous présentons une méthode de décision qui utilise une logique itérative mais qui n'est pas globalement séparable.

Exemple 3.5. 1. La règle de Nanson est globalement séparable. Il suffit de constater que si π et π' sont deux profils, alors $m(\pi + \pi') = m(\pi) + m(\pi')$ où $m(\pi)$ désigne le score de Borda moyen pour le profil π.
Soit π et π' dans $\mathcal{D}(X)$ et F, G deux parties non vides de X telles que $FUG = X$ et $F \cap G = \emptyset$.
Supposons $Ff(\pi)G$, $Ff(\pi')G$ et $f(\pi)_{|G} = f(\pi')_{|G} = Y_1 \cdots Y_r$. Les options de G sont éliminées, de π et π' au cours des r premières étapes. Par la linéarité du score de Borda moyen, ces mêmes options seront éliminées de $\pi + \pi'$ lors des r premiers tours. Par conséquent, nous avons $Ff(\pi_1 + \pi_2)G$. Un raisonnement analogue permet de vérifier la deuxième partie de la propriété (SG).

2. soit $X = \{x, y, z\}$ et f_1 la FUS définie comme suit :
   - On commence par appliquer la règle de Copeland f^C (définie en tant que CCS).
   - Les options qui obtiennent les scores de Copeland les plus faibles sont éliminées et classées dernières. Si une seule option est éliminée, le deux autres options sont départagées par un duel à la majorité.
   La FUS f_1 ne vérifie pas la condition de séparabilité globale. En effet, considérons les deux profils suivants :
   $$\pi : \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{array} \qquad \qquad \pi' : \begin{array}{c} 1 \\ x \\ z \\ y \end{array}$$
   Dans le profil π, chacune des trois options obtient une victoire et une défaite. D'où $f^C(\pi) = X$ et donc $f_1(\pi) = X$. Dans le profil π', l'option y est éliminée au premier tour et x bat z à la majorité. D'où $f_1(\pi') = xzy$. Dans le profil $\pi + \pi'$, chacune des trois options continue à avoir une victoire et une défaite, ce qui donne $f_1(\pi + \pi') = X$.
   Ainsi, nous avons $\{x, z\}f_1(\pi)\{y\}$, $\{x, z\}f_1(\pi')\{y\}$, $\{x, z\}P[f_1(\pi), f_1(\pi')]\{y\}$ et $f(\pi)_{\{y\}} = f(\pi')_{\{y\}}$.
   Mais nous n'avons pas la conclusion $\{x, z\}P(f_1(\pi) + f(\pi'))\{y\}$. Ce qui qui montre que f_1 n'est pas globalement séparable.

4 Proposition d'une caractérisation de la règle de Borda itérative

Nous nous proposons, dans cette dernière sous-section, d'illustrer l'intérêt que peut avoir le recours à la condition de séparabilité globale dans l'étude axiomatique des règles positionnelles itératives. Nous avons choisi la règle de Borda itérative comme exemple de cette illustration. Nous tenons à préciser que le résultat de caractérisation que nous allons présenter n'est qu'un premier pas vers une axiomatisation plus élégante et plus intuitive de la règle de Borda itérative, utilisant la condition de séparabilité globale. Cette propriété semble permettre une meilleure approche des règles positionnelles itératives et pourrait contribuer à la résolution d'un problème ouvert en théorie du choix social : la caractérisation de la classe des RPI en tant que famille de méthodes d'agrégation. Plus modestement, il serait possible d'obtenir des axiomatisations de certaines règles positionnelles séquentielles particulières, comme la règle de la pluralité itérative ou celle de l'antipluralité itérative, en alliant la condition (SG) à des propriétés qui distinguent ces méthodes de l'ensemble des RPI et des RPS. Nous avons essayer de suivre cette intuition dans le cas de la version itérative de la règle de Borda : elle est la seule méthode positionnelle (simple ou séquentielle) qui respecte le principe de Condorcet [7]. Malheureusement, nous ne savons toujours pas s'il est possible (ou non) d'obtenir une caractérisation de cette règle, basée sur les conditions (SG) et (VC). Le résultat que nous présentons maintenant fait appel, à côté de l'hypothèse de séparabilité globale, à un ensemble de propriétés incluant une condition moins intuitive que le principe de Condorcet. Pour l'introduire, nous rappelons la notion de *Pareto-domination*.

Définition 4.1. Soit π un profil sur X défini par $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$. Une option y est dite *Pareto-dominée* dans π par une option x si, pour tout j dans $\{1, \cdots, n\}$, xp_jy.
Une partie G de X est dite *pareto-dominée* par une autre partie F de X si toute option de G est Pareto-dominée par toute option de F. On notera $FD^\pi G$.

Il est très souvent admis, en théorie du choix social, que si une option y est Pareto-dominée par une option x, alors le classement collectif doit suivre l'avis unanime des votants en préférant strictement x à y. Il s'agit

7. La méthode de Nanson vérifie aussi la condition (VC), elle est aussi globalement séparable. Il est cependant facile, dans une axiomatique de la règle de Borda itérative, d'exclure cette méthode : il suffit d'imposer le principe de Pareto.

du principe de Pareto, qui fait partie des hypothèses du fameux théorème d'Arrow. Dans le cas des CCS, ce principe coïncide avec l'idée, difficilement contestable, d'exclure les options Pareto-dominées de l'ensemble de choix collectif. Il est possible, lorsque les CCS sont définies sur $\mathcal{D}(X) \times (2^X \setminus \{\emptyset\})$, d'aller plus loin que cette exigence. Ainsi, dans sa caractérisation de la règle de la pluralité, Richelson [13] a introduit une condition d'*indépendance par rapport aux options Pareto-dominées* (IOP) : la suppression de ces options ne doit pas altérer l'ensemble de choix collectif. Le cadre formel que nous avons retenu ne permettant pas de faire varier le nombre de candidats, la propriété suivante s'inspire partiellement de l'idée de Richelson mais ne constitue pas une traduction fidèle, en termes de FUS, de la condition (IOP).

Définition 4.2. Une fonction d'utilité sociale f, définie sur $\mathcal{D}(X)$, vérifie la condition de *Pareto-indépendance par rapport aux options perdantes* (PIP) si, pour tous profils π_1, π_2 dans $\mathcal{D}(X)$ et pour toutes parties non vides F et G de X telles que $FUG = X$ et $F \cap G = \emptyset$, nous avons :

$$\big(\pi_{1|F} = \pi_{2|F}, FP(f(\pi_1))G \text{ et } FD^{\pi_2}G\big) \Rightarrow f(\pi_1)_{|F} = f(\pi_2)_{|F}.$$

L'idée est la suivante : si l'on considère que les candidats qui occupent le rangs inférieurs dans la préférence collective sont faibles (ou perdants), alors, en devenant encore plus faibles, ils ne doivent pas altérer (ou perturber) le classement collectif des options les plus fortes.

Exemple 4.1.

1. la règle de Borda ne vérifie pas la condition (PIP). En effet soit π le profil défini sur $X = \{x, y, z\}$ par :

$$\pi : \quad \begin{array}{ccc} 17 & 15 & 4 \\ x & y & y \\ y & x & z \\ z & z & x \end{array}$$

   Les scores de Borda sont $S_{\mathcal{B}}(\pi, x) = 49$, $S_{\mathcal{B}}(\pi, y) = 51$ et $S_{\mathcal{B}}(\pi, z) = 4$. Le classement collectif est donc $y \succ x \succ z$. Le candidat z étant très faible, cette élection concerne essentiellement les candidats x et y. Pourtant le candidat z, en devenant encore plus faible, peut inverser le résultat du vote. En effet, si les 4 votants qui ont la préférence $y \succ z \succ x$ décident de faire passer z à la dernière position, les scores de x, y et z deviennent respectivement 53, 50 et 0. Le nouveau classement collectif est donc $x \succ y \succ z$.
2. Nous montrerons, dans la proposition 4.1, que la règle de Borda itérative, et plus généralement toute RPI utilisant des vecteurs score strictement monotones, satisfait à la condition (PIP).
3. La règle f_1 de l'exemple 3.5 vérifie la condition (PIP). En effet, soit π un profil sur $X = \{x, y, z\}$. Il y a trois cas possibles selon le nombre d'options restantes après la première étape. Si aucune option n'est éliminée au premier tour, nous avons $f_1(\pi) = X$ et la définition de la condition (PIP) ne s'applique pas car il n'y a pas de parties F et G de X non vides et vérifiant $FP(f_1(\pi))G$. Si deux options, disons y et z, sont éliminées, nous avons $f_1(\pi) = \{x\}\{y, z\}$ et le fait de faire passer y et z après x dans toutes les préférences individuelles ne change pas le résultat collectif sur le singleton $\{x\}$. Supposons qu'une seule option, disons z, est éliminée au premier tour. Si tous les votants font passer z à la dernière position, cette option sera toujours la seule à être éliminée : z obtient deux défaites et aucune victoire, x et y auront chacun au moins une victoire (contre z) et au plus une défaite. Le classement relatif de la paire $\{x, y\}$, qui ne dépend que du duel majoritaire, reste le même.
4. un raisonnement analogue permet de voir que la règle de Nanson vérifie la condition (PIP).

Proposition 4.1. *Toutes les RPI utilisant des vecteurs score strictement monotones vérifient la condition de Pareto-indépendance par rapport aux options perdantes.*

Preuve. Soit f une RPI utilisant des vecteurs score strictement monotones. Soit π_1, π_2 dans $\mathcal{D}(X)$ et F, G deux parties de X, non vides, disjointes et vérifiant $FUG = X$ et $F \cap G = \emptyset$. Supposons $\pi_{1|F} = \pi_{2|F}$, $FP(f(\pi_1))G$ et $FD^{\pi_2}G$.
La relation $FP(f(\pi_1))G$ indique que seuls les éléments de G sont éliminés de π_1 dans les premiers tours et qu'à une certaine étape, il ne reste plus que les options de F. Appliquons f au profil π_2. La relation $FD^{\pi_2}G$ indique que dans chacune des préférences individuelles formant π_2, les options de F sont classées au dessus des options de G. Comme f utilise des vecteurs score strictement monotones, seules les options de G seront éliminées lors des premiers tours. Une fois que toutes ses options sont éliminées, il ne reste plus que les éléments de F. Le processus d'élimination opère alors exactement de la même manière que pour le profil π_1 car $\pi_{1|F} = \pi_{2|F}$. Nous obtenons donc $f(\pi_1)_{|F} = f(\pi_2)_{|F}$. □

Dans toute la suite, nous noterons $f^{\mathcal{B}}$ la règle de Borda itérative définie en tant que FUS. Le principe de Pareto sera désigné par la notation (P). Nous nous proposons d'établir le résultat suivant.

Thèoreme 4.2. *La règle de Borda itérative est la seule FUS neutre, anonyme et qui satisfait aux conditions (SG), (PIP), (NS) et (P).*

Nous commençons par vérifier que la FUS $f^{\mathcal{B}}$ vérifie les conditions du théorème.

Lemme 4.3. *La règle de Borda itérative vérifie les conditions du théorème 4.2.*

Preuve. Il est évident que $f^{\mathcal{B}}$ est anonyme, neutre et vérifie le principe de Pareto. D'après les propositions 4.1 et 3.2, $f^{\mathcal{B}}$ satisfait aussi aux conditions (SG) et (PIP). Il reste à montrer que $f^{\mathcal{B}}$ vérifie la propriété (NS). Soit π un profil quelconque, I un profil tel que $A(I)$ est symétrique et n la taille de I. À chaque tour, si r options sont en lice, le score de chacune de ces options pour le profil $\pi + I$ est égal à son score pour le profil π, augmenté de $\frac{n(r-1)}{2}$ points (en utilisant le vecteur $(r-1, r-2, \cdots, 1, 0)$). Les comparaisons des scores conduisent donc au même processus d'élimination pour π et $\pi + I$. Par conséquent, $f^{\mathcal{B}}(\pi + I) = f^{\mathcal{B}}(\pi)$. □

Pour la suite de la preuve, nous avons besoin d'introduire une RPS particulière. Nous l'appellerons *inverse de la règle de Borda* . Cette RPS que, nous noterons $h_{\mathcal{B}}$, est la règle positionnelle simple définie (en tant que CCS) à partir du vecteur w_h opposé du vecteur score de la règle de Borda :

$$w_h = -w_{\mathcal{B}} = (-(m-1), -(m-2), \cdots, -1, 0)$$

Notons que la règle $h_{\mathcal{B}}$ peut aussi être définie par le vecteur $(0, 1, \cdots, m-1)$. En effet, ce vecteur est une transformation affine positive du vecteur w_h :

$$(0, 1, \cdots, m-1) = (-(m-1), -(m-2), \cdots, -1, 0) + (m-1)(1, 1, \cdots, 1, 1)$$

Il résulte de cette définition que l'ensemble de choix associé par $h_{\mathcal{B}}$ à un profil π dans $\mathcal{D}(X)$ est décrit par :

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{B}}(\pi) &= \{x \in X : \forall y \in X, S_{h_{\mathcal{B}}}(\pi, x) \geq S_{h_{\mathcal{B}}}(\pi, y)\} \\ &= \{x \in X : \forall y \in X, S_{\mathcal{B}}(\pi, x) \leq S_{\mathcal{B}}(\pi, y)\} \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant un condition purement technique qui permet d'isoler l'inverse de la règle de Borda. Nous dirons qu'une CCS g vérifie « la condition » de Pareto-inverse (ou, plutôt, inverse la condition de Pareto) si pour tout profil π dans $\mathcal{D}(X)$ et pour toutes options x, y dans X, $xD^{\pi}y \Rightarrow x \notin g(\pi)$.

Lemme 4.4. *L'inverse de la règle de Borda est la seule CCS anonyme, neutre, consistante et qui vérifie les conditions d'annulation et de Pareto-inverse.*

Preuve. Il est clair que l'inverse de la règle de Borda est anonyme, neutre, consistante et vérifie la « propriété » de Pareto-inverse. Pour voir que $h_{\mathcal{B}}$ vérifie la condition d'annulation, il suffit de constater que les scores produits par cette règle, en utilisant l'opposé du vecteur de Borda, sont les opposés des scores de Borda et que la méthode de Borda vérifie cette condition.
Pour établir l'autre sens, nous commençons par exclure la règle constante et la règle de Borda car elles ne vérifient pas la « condition » de pareto-inverse. D'autre part, on sait, par le théorème de Young , que les règles positionnelles simples (ou composées) sont les seules CCS anonymes, neutres et consistantes. Or, la règle de Borda et la règle $h_{\mathcal{B}}$ sont les seules règles positionnelles simples (non constantes) à vérifier la condition d'annulation [8] Ainsi les RPS simples, non constantes et différentes de la règle de Borda et de son inverse sont aussi exclues. Soit g une règle positionnelle composée, si le premier vecteur (non constant) utilisé par g est différent de celui de Borda et de celui de $h_{\mathcal{B}}$, alors g ne peut pas vérifier la propriété d'annulation. Si g utilise le vecteur de Borda en premier, elle ne peut pas vérifier la « condition » de Pareto-inverse. Enfin, si g utilise, en premier, le vecteur w_h, elle doit se servir d'un deuxième vecteur (différent) pour qu'elle soit différente de $h_{\mathcal{B}}$. Il y a deux cas : ou bien ce vecteur est différent de celui de Borda et dans cas g ne vérifie pas la condition d'annulation, ou bien c'est le vecteur de Borda et alors g ne vérifie pas la « propriété » de Pareto-inverse.
Finalement $h_{\mathcal{B}}$ est la seule CCS qui satisfait aux conditions du lemme. $\square$

Lemme 4.5. *Soit f une FUS vérifiant les conditions du théorème 4.2. Soit F et G deux parties de X, disjointes et vérifiant $FUG = X$ et $F \neq \emptyset$. Soit π un profil tel que $FD^{\pi}G$, $A(\pi_{|F})$ est symétrique et le classement relatif des éléments de G est le même pour tous les votants. Alors $FI(f(\pi))F$ (i.e. : pour tous x, y dans F, $xI(f(\pi))y$).*

Preuve. f étant anonyme et nulle-stable, on montre facilement qu'elle est basée sur les comparaisons par paires. Si $|F| = 1$, il n'y a rien à prouver car, dans ce cas, F est réduit à une seule option, disons x, et nous avons toujours $xI(f(\pi))x$. Examinons le cas $|F| \geq 2$. Soit π un profil vérifiant les hypothèses du lemme et soit n sa taille. Le classement relatif des éléments de G (qui peut éventuellement être réduit à l'ensemble vide) est le même dans toutes les préférences individuelles formant π. Notons L l'ordre linéaire sur G décrivant ce classement. La matrice $A(\pi_{|F})$ étant symétrique, le nombre (de votants) n est pair et les coefficients de $A(\pi)$ sont données par :

$$a_{jk}(\pi) = \frac{n}{2} \quad \text{pour tous } x_j, x_k \text{ dans } F\ (x_j \neq x_k).$$
$$a_{jk}(\pi) = n \quad \text{pour tout } x_j \text{ dans } F \text{ et } x_k \text{ dans } G.$$
$$a_{jk}(\pi) = na_{jk}(L) \quad \text{pour tous } x_j, x_k \text{ dans } G.$$
$$a_{jj}(\pi) = 0 \quad \text{pour tout } x_j \text{ dans } X.$$

Soit x et y deux options distinctes dans F. Il s'agit de montrer que $xI(f(\pi))y$. Soit **R** le profil formé des deux ordres linéaires L_1 et L_2 définis sur X par :

- x occupe la première position dans L_1, y occupe la dernière position dans $L_{1|F}$, tous les éléments de F sont classés avant tous les éléments de G (i.e. $FD^{L_1}G$) et $L_{1|G} = L$.
- y occupe la première position dans L_2, x occupe la dernière position dans $L_{2|F}$, tous les éléments de F sont classés avant tous les éléments de G (i.e. $FD^{L_2}G$) et $L_{2|G} = L$.

8. Cette assertion n'est pas difficile à établir. On peut par exemple commencer par déduire des deux théorèmes de Young (caractérisation des RPS et caractérisation de la règle de Borda) que la règle de Borda est la seule RPS loyale qui vérifie la condition d'annulation.

- $\overline{L_{1|F\setminus\{x,y\}}} = L_{2|F\setminus\{x,y\}}$

Soit $\pi' = \frac{n}{2}\mathbf{R}$. On vérifie facilement que $A(\pi) = A(\pi')$. Comme f ne dépend que des matrices de surclassement, nous avons $f(\pi) = f(\pi')$. Or $xI(f(\pi'))y$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la permutation σ qui échange x et y, transforme $L_{1|F\setminus\{x,y\}}$ en $\overline{L_{1|F\setminus\{x,y\}}}$ et laisse invariants les éléments de G. Il est clair que $\sigma(L_1) = L_2$ et $\sigma(L_2) = L_1$. Par conséquent $\sigma(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, et donc $\sigma(\pi') = \pi'$. La FUS F étant neutre, nous devons avoir $xI(f(\pi'))y$. Comme $f(\pi) = f(\pi')$, nous obtenons $xI(f(\pi))y$. Cette relation étant vraie pour tous x, y dans F, on conclut que $FI(f(\pi)F$. $\square$

Preuve du théorème 4.2. D'après le lemme 4.3, la règle Borda itérative satisfait à toutes les conditions du théorème.

Réciproquement, soit f une FUS anonyme, neutre et vérifiant (SG), (PIP), (NS) et (P). Pour toute partie Z de X, non vide, nous fixons un ordre linéaire L_Z sur Z. Soit Y une partie, non vide, de X. Pour tout profil θ défini sur Y, nous noterons $\Lambda(\theta)$ le profil défini par :

- Si $Y = X$, $\Lambda(\theta) = \theta$.
- Si $Y \neq X$ (i.e $Y \subsetneq X$), soit $Z = X \setminus Y$. Le profil $\Lambda(\theta)$ est tel que :
  - $\Lambda(\theta)$ est un profil sur X et il a la même taille (nombre de votants) que θ.
  - $\Lambda(\theta)_{|Y} = \theta$.
  - Toute option de Z est Pareto-dominée par toute option de Y (i.e $YD^{\Lambda(\theta)}Z$) et tous les votants classent les options de Z de la même manière et conformément à l'ordre L_Z.

  Notons que si θ et θ' sont deux profils sur Y, nous avons :

$$\Lambda(\theta) + \Lambda(\theta') = \Lambda(\theta + \theta')$$

Pour toute partie Y de X ($Y \subsetneq X$), nous désignons par h^Y la CCS, définie sur Y, qui à tout profil θ sur Y fait correspondre un ensemble de choix collectif défini par :

$$h^Y(\theta) = \left\{x \in Y : \forall y \in Y, yf(\Lambda(\theta))x\right\}$$

L'ensemble $h^Y(\theta)$ est donc formé par toutes les options de Y classées dernières dans le préordre $f(\Lambda(\theta))_{|Y}$. Ainsi, une option x de Y appartient à l'ensemble de choix de h^Y si et seulement si $(Y \setminus \{x\})f(\Lambda(\theta))\{x\}$. De manière équivalente, l'option x est dans h^Y si et seulement si $(Y \setminus \{x\})f(\Lambda(\theta))(\{x\} \cup Z)$ (car $YD^{\Lambda(\theta)}Z$ et f vérifie la condition de Pareto).

Nous allons prouver que pour toute partie Y de X ($Y \neq \emptyset$), la CCS h^Y est exactement la règle inverse de la règle de Borda (définie sur Y). Pour cela, nous montrons que h^Y satisfait aux conditions du lemme 4.4. Il est évident que h^Y est neutre et anonyme. Il reste à établir les trois points suivants :

1. h^Y est consistante.
2. h^Y vérifie la propriété d'annulation.
3. h^Y vérifie la « condition » de Pareto-inverse.

1. Pour plus de clarté, nous distinguons les cas $Y = X$ et $Y \subsetneq X$.

Cas 1. $Y = X$. Soit π et π' deux profils sur X tels que $h^X(\pi) \cap h^X(\pi') \neq \emptyset$. Il s'agit de montrer que $h^X(\pi + \pi') = h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$. Soit x dans $h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$. Posons $F = X \setminus \{x\}$ et $G = \{x\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&Ff(\pi)G \quad \text{(car } x \in h^X(\pi))\\
&Ff(\pi')G \quad \text{(car } x \in h^X(\pi'))\\
&f(\pi)_{|G} = f(\pi')_{|G}
\end{aligned}$$

Comme la FUS f est globalement séparable, nous devons avoir $Ff(\pi+\pi')G$, c'est-à-dire $(X \setminus \{x\})f(\pi+\pi')\{x\}$. D'où $x \in h^X(\pi+\pi')$. Ce qui montre que $h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$ est inclus dans $h^X(\pi+\pi')$.
Pour établir l'autre sens de l'inclusion, posons $F = X \setminus (h^X(\pi) \cap h^X(\pi'))$ et $G = h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$. Nous avons :

$$Ff(\pi)G \quad (\text{car } G \subseteq h^X(\pi))$$
$$Ff(\pi')G \quad (\text{car } G \subseteq h^X(\pi'))$$
$$FP[f(\pi), f(\pi')]G \quad (\text{car } FP(f(\pi))(X \setminus h^X(\pi)) \text{ et } FP(f(\pi'))(X \setminus h^X(\pi'))$$
$$f(\pi)_{|G} = f(\pi')_{|G} \quad (\text{car les éléments de } G \text{ sont ex æquo dans } f(\pi) \text{ et dans } f(\pi'))$$

La FUS f étant globalement séparable, nous obtenons $FP(f(\pi+\pi'))G$. Ainsi, toutes les options de $X \setminus (h^X(\pi) \cap h^X(\pi'))$ sont strictement préférées aux options de $h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$, dans le préordre complet $f(\pi+\pi')$. Par conséquent, les options classées dernières, dans $f(\pi+\pi')$, se trouvent parmi les éléments de $h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$. Autrement dit, $h^X(\pi+\pi') \subseteq h^X(\pi) \cap h^X(\pi')$.
Cas 2. $Y \subsetneq X$. Soit $Z = X \setminus Y$. La preuve est essentiellement la même que celle du premier cas. Soit θ et θ' deux profils sur Y tels que $h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta') \neq \emptyset$. Il s'agit de montrer que $h^Y(\theta+\theta') = h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta')$. Soit x dans $h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta')$. Posons $F = Y \setminus \{x\}$ et $G = \{x\} \cup Z$. Nous avons $Ff(\Lambda(\theta))G$ (car $x \in h^Y(\theta)$ et $YD^{\Lambda(\theta)}Z$), $Ff(\Lambda(\theta'))G$ (car $x \in h^Y(\theta')$ et $YD^{\Lambda(\theta')}Z$) et $f((\Lambda(\theta))_{|G} = f(\Lambda(\theta'))_{|G}$ (car toutes les options de Z sont Paréto-dominées par x et classées selon l'ordre L_Z dans $\Lambda(\theta)$ et dans $\Lambda(\theta')$). Par la séparabilité globale, on a $Ff(\Lambda(\theta)+\Lambda(\theta'))G$. Or $\Lambda(\theta)+\Lambda(\theta') = \Lambda(\theta+\theta')$. Donc $Ff(\Lambda(\theta+\theta'))G$. D'où $x \in h^Y(\theta+\theta')$. Ce qui montre que $h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta')$ est inclus dans $h^Y(\theta+\theta')$.
Pour établir l'inclusion dans l'autre sens, posons $F = Y \setminus (h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta'))$ et $G = h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta') \cup Z$. Nous avons :

$$Ff(\Lambda(\theta))G \quad (\text{car } G \subseteq h^Y(\theta), YD^{\Lambda(\theta)}Z \text{ et } f \text{ vérifie la condition de Pareto})$$
$$Ff(\Lambda(\theta'))G \quad (\text{car } G \subseteq h^Y(\theta'), YD^{\Lambda(\theta')}Z \text{ et } f \text{ vérifie la condition de Pareto})$$
$$f(\Lambda(\theta))_{|G} = f(\Lambda(\theta'))_{|G}$$

La dernière relation vient du fait que, dans $\Lambda(\theta)$ et $\Lambda(\theta')$, les options de Z sont classées (par tous les votants) selon l'ordre L_Z et sont pareto-dominées par les options de $h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta')$ qui elles sont équivalentes dans le préordre $f(\Lambda(\theta))$ et dans le préordre $f(\Lambda(\theta')$.
En plus de ces trois relations, nous avons $FP[f(\Lambda(\theta)), f(\Lambda(\theta'))]G$. En effet, soit x dans F et y dans G. Si y est dans Z, nous avons $xP(f(\Lambda(\theta))y$ (et $xP(f(\Lambda(\theta'))y$ car $xD^{\Lambda(\theta)}y$ (et $xD^{\Lambda(\theta')}y$) et f vérifie la condition de Pareto. Si y est dans $h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta')$, écrivons F sous la forme $F = (Y \setminus h^Y(\theta)) \cup (Y \setminus h^Y(\theta'))$. Si x appartient à $Y \setminus h^Y(\theta)$, nous avons $xP(f(\Lambda(\theta))y$ (car $y \in h^Y(\theta)$). Si x appartient à $Y \setminus h^Y(\theta')$, nous avons $xP(f(\Lambda(\theta'))y$ (car $y \in h^Y(\theta')$).
Comme f est globalement séparable, nous obtenons $FP(f(\Lambda(\theta+\theta'))G$. Ainsi, toutes les options de $Y \setminus (h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta'))$ sont strictement préférées aux options de $(h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta'))$, dans le préordre complet $f(\Lambda(\theta+\theta')$. Par conséquent, les options classées dernières, dans $f(\Lambda(\theta+\theta'))_{|Y}$, se trouvent parmi les éléments $(h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta'))$. Autrement dit, $h^Y(\theta+\theta') \subseteq (h^Y(\theta) \cap h^Y(\theta'))$.
2. Soit θ un profil sur Y tel que $A(\theta)$ est symétrique. Soit $Z = X \setminus Y$. Le profil $\Lambda(\theta)$ est tel que $YD^{\Lambda(\theta)}Z$, $A(\Lambda(\theta)_{|Y})$ est symétrique et le classement relatif des éléments de Z est le même pour tous les votants. D'après le lemme 4.5, nous avons $YI(f(\Lambda(\theta))Y$. D'où $h^Y(\theta) = Y$. Ce qui montre que h^Y vérifie la propriété d'annulation.
3. Soit θ un profil sur Y et x, y deux options de Y tels que $xD^\theta y$. Nous avons $\Lambda(\theta)_{|Y} = \theta$, nous avons aussi

$xD^{\Lambda(\theta)}y$. Or la FUS f respecte le principe de Pareto. Par conséquent, $xP(f(\Lambda(\theta)))y$. Ainsi, l'option x n'est pas classée dernière dans $\Lambda(\theta)_{|Y}$ et donc $x \notin h^Y(\theta)$. Ce qui montre que h^Y inverse le principe de Pareto.

Soit maintenant un profil π dans $\mathcal{D}(X)$. Nous allons montrer que $f(\pi) = f^{\mathcal{B}}(\pi)$. Écrivons le préordre $f(\pi)$ sous la forme $f(\pi) = X_1 \cdots X_s$. Nous avons :

$$X_s = \{x \in X : \forall y \in X, yf(\pi)x\} = h^X(\pi)$$

Or h^X est la règle inverse de la règle de Borda (sur X). Donc X_s est l'ensemble des options qui ont un score de Borda minimal. Ce qui montre que $f(\pi)_{|X_s} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|X_s}$.
Si $s = 1$, nous avons $f(\pi) = f^{\mathcal{B}}(\pi) = X$ et il n'y a plus rien à montrer. Considérons donc le cas $s \geq 2$. Soit $t = s, \cdots, 2$. Supposons avoir établi, par induction sur t, que $f(\pi)_{|E_t} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|E_t}$ avec $E_t = X_t \cup \cdots X_s$. Montrons que $f(\pi)_{|E_{t-1}} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|E_{t-1}}$. Il suffit de montrer que $f(\pi)_{|X_{t-1}} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|X_{t-1}}$.
Posons $Y = X \setminus E_t$ et $Z = E_t$. Par définition de $f(\pi)$, nous avons :

$$YP(f(\pi))Z \tag{1}$$

Soit L_Z l'ordre linéaire associé, au début de cette preuve, à la partie Z et soit θ le profil défini sur Y par $\theta = \pi_{|Y}$. Par définition du profil $\Lambda(\theta)$, nous avons :

$$\pi_{|Y} = \Lambda(\theta)_{|Y} \tag{2}$$

$$YD^{\Lambda(\theta)}Z \tag{3}$$

Comme la FUS f vérifie la condition de Pareto-indépendance par rapport aux alternatives perdantes, les relations (1), (2) et (3) permettent d'obtenir :

$$f(\pi)_{|Y} = f(\Lambda(\theta))_{|Y} \tag{4}$$

Par définition de $f(\pi)$, nous avons $X_{t-1} = \{x \in Y : \forall y \in X, yf(\pi)x\}$. D'après 4, cet ensemble s'écrit aussi $X_{t-1} = \{x \in Y : \forall y \in X, yf(\Lambda(\theta))x\}$. D'où $X_{t-1} = h^Y(\theta)$. Or $\theta = \pi_{|Y}$, h^Y est l'inverse de la règle de Borda (sur Y). Par conséquent, X_{t-1} est formé par les options de Y qui ont un score de borda minimal pour le profil $\pi_{|Y}$. Comme $Y = X \setminus E_t$ et $f(\pi)_{|E_t} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|E_t}$ (par hypothèse de récurrence), il vient que $f(\pi)_{|X_{t-1}} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|X_{t-1}}$ et donc que $f(\pi)_{|E_{t-1}} = f^{\mathcal{B}}(\pi)_{|E_{t-1}}$.
En conclusion, nous avons $f(\pi) = f^{\mathcal{B}}(\pi)$. Ce qui montre que f est la règle de Borda itérative. $\square$

Pour compléter le résultat du théorème 4.2, nous montrons que, sous les hypothèses d'anonymat et de neutralité, les conditions (SG), (PIP), (NS) et (P) sont indépendantes :

1. La FUS f_1 définie dans dans la deuxième partie de l'exemple 3.5 est anonyme et neutre. D'après l'exemple 4.1, elle vérifie la condition (PIP). Il est facile de voir que f_1 respecte les conditions (NS) et (P). Cependant, elle n'est pas globalement séparable (voir exemple 3.5).

2. La règle de Borda, définie en tant que FUS, satisfait aux conditions (A), (N). Elle est aussi globalement séparable car elle est séparable (proposition 3.2) et vérifie les propriétés (NS) et (P). En revanche, elle ne respecte pas la condition (PIP) (exemple 3.5).

3. Pour $m = 3$, soit f la RPI associée au vecteurs score $w(3) = (4, 1, 0)$ et $w(2) = (1, 0)$. Il est facile de voir que f remplie les conditions (A), (N), (SG) et (P). D'après la proposition 4.1, f vérifie aussi la propriété (PIP). Cependant f n'est pas nulle-stable.

4. La règle de Nanson vérifie les conditions (A), (N), (SG) (exemple 3.5), (PIP) (exemple 4.1) et (NS) mais ne respecte pas le principe de Pareto.

5 Conclusion

La condition de séparabilité globale constitue l'apport principal de cette étude. Elle permet de relativiser l'un des défauts majeurs des règles positionnelles itératives, à savoir le viol des conditions de renforcement. Cette condition nous semble aussi permettre une meilleure approche axiomatique des règles positionnelles séquentielles : il devient possible avec cette condition d'avoir des informations sur le résultat collectif produit par les RPI lorsque des profils de préférences sont réunis. Malheureusement, la propriété de séparabilité globale est aussi vérifiée par les règles positionnelles simples et ne peut donc servir de base pour une dérivation axiomatique de la classe des RPI. La caractérisation de cette famille de méthodes de décision reste donc un problème ouvert. Cependant, le résultat du 4.2 ouvre la voie à des axiomatisatons de certaines règles positionnelles séquentielles particulières, alliant la condition (SG) à des propriétés qui distinguent ces règles de toutes les RPI et de toutes les RPS.

Références

[1] C. COOMBS. *Theory of Data*. John Wiley, New York, 1957.

[2] S. DURAND. *Sur quelques paradoxes en théorie du choix social et en décision multicritère*. PhD thesis, Université Joseph Fourier-Greoble1, Grenoble, 2000.

[3] S. DURAND. A note on monotonicity in iterated social choice functions. *Social Choice and Wealfare*, 18 :129–134, 2001.

[4] P.C. FISHBURN. Axioms for approval voting : a direct proof. *Journal of Economic Theory*, 19 :18O–185, 1978.

[5] P.C. FISHBURN. Symmetric and consistent aggregation with dichotomous voting. In *Aggregation and revalation of preferences*, pages 201–218, North-Holland, Amsterdam, 1979. J.-J. Laffont.

[6] T. HARE. *Treatise on the Election of Representatives, Parliamentary and Municipal*. Longmans Green, London, 1859.

[7] K.H. KIM and F.W. ROUSH. Statistical manipulability of social choice functions. *Group Decision and Negotiation*, 5 :263–282, 1997.

[8] D. LEPELLEY. *Contribution à l'analyse des procédures du vote*. PhD thesis, Université de caen, 1989.

[9] D. LEPELLEY ET V. MERLIN. Choix social positionnel et principes majoritaires. *Annales d'Economie et de Statistiques*, 51 :29–48, 1988.

[10] V. MERLIN. *L'agrégation des préférences individuelles : les règles positionnelles itératives et la méthode de Copeland*. PhD thesis, Université de Caen, 1996.

[11] R. MYERSON. Axiomatic derivation of scoring rules without the ordering assumption. *Social Choice and Welfare*, 12 :59–74, 1995.

[12] E. J. NANSON. *Methods of Elections*, pages 197–240. 1982.

[13] J.T. RICHELSON. A characterization result for the plurality rule. *Journal of Economc Theory*, 19 :548–550, 1978.

[14] J.T. RICHELSON. Running off empty : run off point systems. *Public choice*, 35 :457–468, 1980.

[15] D.G. SAARI. A dictionary for voting paradoxes. *Journal of Economic Theory*, 48 :443–475, 1988.

[16] D.G. SAARI. Consistency of decision processes. *Annals of Operations Research*, 23 :103–137, 1991.

[17] D.G. SAARI. *Geometry of Voting*. Springer Verlag, New York, 1994.

[18] M.R. SERTEL. Characterizing approval voting. *Journal of Economic Theory*, 45 :207–211, 1988.

[19] J.H. SMITH. Aggregation of preferences with variable electorate. *Econometrica*, 41 :1027–1041, 1973.

[20] H.P. YOUNG. Social choice scoring functions. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 28 :824–838, 1975.

[21] H.P. YOUNG and A. LEVENGLICK. A consistent extension of Condorcet's election principle. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 35 :285–300, 1978.