Manipulabilité coalitionnelle du vote par note à trois niveaux

Abdelhalim El Ouafdi   Dominique Lepelley   Hatem Smaoui

Novembre 2019

Résumé. *Nous prolongeons notre analyse probabiliste de la règle de vote par note à trois niveaux (EV) par le calcul de sa vulnérabilité à la manipulation stratégique par une coalition de votants. Pour pouvoir comparer les performances de EV à celles des règles de la pluralité, de l'antipluralité et de Borda, nous calculons aussi les fréquences théoriques des situations de vote instables sous chacune des extensions de ces trois règles au cadre des préférences trichotomiques.*

1. Introduction

Nous savons, depuis le théorème de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975), que toutes les règles de vote non dictatoriales sont manipulables. Cela signifie que, pour toutes ces règles, il existe des situations pour lesquelles certains votants ont la possibilité d'exprimer une préférence non sincère de manière à obtenir un résultat collectif qu'ils préfèrent à celui qu'ils obtiendraient en votant sincèrement. L'étude de la fréquence théorique de ce type de situations a fait l'objet d'une abondante littérature en théorie du vote. A titre d'exemples, on peut citer les travaux de Peleg (1979), Chamberlin (1985), Nitzan (1985), Lepelley et Mbih (1987, 1994), Lepelley et Valognes (2003), Saari (1990), Kelly (1993), Kim et Roush (1996), Favardin et Lepelley (2006), Pritchard et Wilson (2007)[1]. Ces études différent par les hypothèses sur la distribution des préférences des votants (IC ou IAC), mais aussi par la manière de définir et de mesurer la manipulation stratégique. Globalement, on peut distinguer deux définitions : la manipulation individuelle (seules les situations où la règle de vote est manipulable par un seul votant sont

[1] Ces études considèrent des règles de vote qui choisissent un seul gagnant (les cas d'égalité sont tranchés en se référant à une règle de tie-break). Il existe une autre littérature qui s'intéresse aux règles à choix multiple (possibilité d'avoir plusieurs candidats gagnants) ; voir par exemple Aleskerov et al. (2011).

prises en compte) et la manipulation coalitionnelle (qui retient les situations où la règle de vote est manipulable par un groupe constitué d'un ou de plusieurs votants). La mesure de la fréquence des situations de vote propices à la manipulation (situations instables) dépend en général du seuil k que la taille de la coalition manipulatrice (minimale) ne doit pas dépasser : on a ainsi $k = 1$ pour la manipulation individuelle, et $k = \infty$ pour la manipulation par une coalition de taille quelconque[2].

Tous les travaux que nous venons de citer se sont intéressés à des règles de vote par classement (i.e., où les préférences individuelles sont représentées par des ordres linéaires sur l'ensemble des candidats). A notre connaissance, il n'existe à ce jour aucune étude permettant de quantifier la manipulabilité (théorique) des règles de vote par évaluation. Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étendre la notion de manipulation stratégique (par une coalition de votants) au cadre des préférences trichotomiques, dans le but d'évaluer et de comparer la manipulabilité des quatre règles de vote suivantes : le vote par note à trois niveaux (EV), et les règles de la pluralité (PR), de l'antipluralité (NPR) et de Borda (BR). Notre motivation principale étant d'associer un ordre de grandeur à l'une des critiques (intuitives) les plus fréquentes de la règle de vote par note EV, selon laquelle cette règle est « très manipulable ».

La suite de ce papier est organisée comme suit. Dans la section 2, nous introduisons quelques définitions et notations, nous adaptons la notion de manipulation stratégique au contexte des préférences trichotomiques. Dans la section 3, nous caractérisons les situations de vote instables sous chacune des quatre règles étudiées et nous évaluons les fréquences théoriques de ces situations. Enfin, dans la section 4, nous donnons une courte description d'une (nouvelle) méthode de calcul de probabilités sous IAC, que nous avons utilisée pour obtenir nos résultats et dont la portée nous semble potentiellement importante.

2. Préférences trichotomiques et manipulation stratégique

Nous reprenons le cadre des préférences trichotomiques introduit dans Smaoui et Lepelley (2013) et El Ouafdi et al. (2017). On considère donc des élections avec un ensemble N de n votants et un ensemble de trois candidats $X = \{A, B, C\}$, et on suppose que chaque votant exprime son avis sur les trois candidats en choisissant l'une des 24 préférences trichotomiques suivantes :

[2] Pour une description plus complète des différentes manières d'évaluer la manipulation stratégique, voir Pritchard et Wilson (2007).

A	A	B	B	C	C	AB	AB	AC	AC	BC	BC
B	C	A	C	A	B	C	$-$	B	$-$	A	$-$
C	B	C	A	B	A	$-$	C	$-$	B	$-$	A
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}

A	A	B	B	C	C	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
BC	$-$	AC	$-$	AB	$-$	A	BC	B	AC	C	AB
$-$	BC	$-$	AC	$-$	AB	BC	A	AC	B	AB	C
R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	R_{17}	R_{18}	R_{19}	R_{20}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}

Dans la suite de ce document, pour des raisons pratiques, nous utiliserons aussi une notation sur une seule ligne pour désigner ces préférences trichotomiques : par exemple, ABC pour R_1, $(AB)C-$ pour R_8, $(AC)-B$ pour R_{10}, $-A(BC)$ pour R_{19}, etc. Rappelons aussi que, dans toutes les préférences trichotomiques, il y a toujours trois classes (groupes, catégories), que tout candidat d'une classe supérieure est préféré à tout candidat d'une classe inférieure, et que l'une des classes peut être vide (nous ignorons le cas où deux classes sont vides, c'est-à dire le cas où les trois candidats se trouvent dans la même classe). Ainsi, dans R_1, les candidats A, B et C se trouvent respectivement dans la première, la deuxième et la troisième classe ; alors que dans R_{10}, A et B sont dans la première classe, aucun candidat n'est dans la deuxième classe, et B est seul à la dernière classe.

Pour une préférence trichotomique R_i $(1 \leq i \leq 24)$ on notera $P(R_i)$ et $I(R_i)$ la relation de préférence stricte et la relation d'indifférence qui découlent naturellement de R_i. Rappelons qu'un profil de taille n est une liste ordonnée de n préférences individuelles et qu'une situation de vote de taille n est un profil anonyme, c'est-à-dire une répartition de n préférences individuelles en un 24-uplet $x = (n_1, n_2, \cdots, n_{24})$ où n_i est le nombre de votants ayant la préférence trichotomique R_i. L'ensemble des situations de vote de taille n et l'ensemble de toutes les situations de vote (de taille quelconque) sont notés $V(n)$ et V respectivement. Nous nous nous intéressons ici à des procédures électorales anonymes, nous définissons donc une règle de vote comme une application F qui à chaque situation x dans V associe un unique candidat gagnant $F(x)$ dans X. La règle de vote par note à trois niveaux, EV, peut être définie de la manière suivante. Pour chaque préférence individuelle trichotomique, les candidats de la première classe (ceux qui sont préférés à tous les autres candidats) se voient attribuer 2 points chacun, les candidats de la deuxième classe 1 point chacun, et les candidats de la troisième classe 0 point chacun. Le gagnant est le candidat qui obtient le total de points (score) le plus élevé.

Pour adapter PR, NPR et BR (et plus généralement n'importe quelle règle positionnelle simple) au cadre des préférences trichotomiques, nous procédons de la même manière que dans El Ouafdi et al. (2016). Soit F une règle positionnelle simple utilisant le vecteur points $v = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ et $\lambda_1 > \lambda_3$; on a $v = (1, 0, 0)$ pour PR, $v = (1, 1, 0)$ pour NPR et $v = (2, 1, 0)$ pour BR. On commence par transformer chaque préférence trichotomique, R_i, en un classement des trois candidats, en ignorant les classes vides et en utilisant les composantes $P(R_i)$ et $I(R_i)$ (par exemple, R_8 devient $A \sim B \succ C$: A et B sont équivalents et sont préférés à C). Les scores des candidats sous F se calculent alors de la manière suivante. Si le classement obtenu, après la transformation de R_i, est un ordre strict, alors chaque candidat reçoit λ_k points lorsqu'il occupe la position k dans cet ordre. Si ce classement est un ordre faible du type $X \succ Y \sim Z$, alors X reçoit λ_1 points, et Y et Z reçoivent chacun $(\lambda_2 + \lambda_3)/2$ points. Enfin, si ce classement est un ordre faible du type $X \sim Y \succ Z$, alors X et Y reçoivent chacun $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ points et Z reçoit λ_3 points. La candidat gagnant par la règle positionnelle étendue F est alors celui qui obtient le plus grand total de points.

Nous allons maintenant nous intéresser à la vulnérabilité à la manipulation coalitionnelle des règles de vote décrites ci-dessus. Dans la définition suivante nous n'imposons aucune limite à la taille de la coalition manipulatrice, nous supposons que l'information est parfaite (chaque votant connait parfaitement les préférences des autres votants), et nous ignorons les situations d'ex aequo (qui conduisent à l'application d'une règle de tie-break).

Définition. Soient F une règle de vote et $x = (n_1, \cdots, n_{24})$ une situation de vote. On dit que F est manipulable en x (ou que x est instable sous F) s'il existe une situation de vote de même taille, $y = (m_1, \cdots, m_{24})$ telle que pour tout $i = 1, \ldots, 24$, on a : $(n_i > 0$ et $n_i < m_i) \Rightarrow F(y)P(R_i)F(x)$.

Il est important de souligner que, dans cette définition formelle, les situations instables sont décrites comme des situations *pouvant donner lieu à* un comportement stratégique de la part de certains votants. Plus précisément, une situation de vote x est instable si elle offre à un groupe de votants (coalition) la possibilité de changer de préférences (au moment du vote) pour transformer x en une situation de vote y dont le gagnant, $F(y)$, est préféré par tous les membres de la coalition au gagnant dans x, $F(x)$. Les deux exemples suivants peuvent aider à rendre encore plus claire cette notion d'instabilité et donnent une idée sur les possibilités d'action stratégique que ces situations peuvent offrir aux éventuels groupes de manipulateurs sous chacune des règles de vote étudiées.

Exemple 1. Considérons la situation de vote x définie par :

A	C	AB	BC	$-$
C	B	$-$	$-$	BC
B	A	C	A	A
4	4	12	1	1

On peut voir facilement que cette situation est instable lorsque la règle de vote par note à trois niveaux, EV, est utilisée. En effet, les scores des trois candidats sont donnés par : $S_{EV}(A,x) = 32$, $S_{EV}(B,x) = 31$ et $S_{EV}(C,x) = 15$. Le gagnant est donc le candidat A ($EV(x) = A$). Supposons que deux des quatre votants ayant la préférence R_6 (CBA) décident de ne pas voter sincèrement, et inversent leur préférence entre C et B, passant ainsi de R_6 à R_4 (BCA). On obtient alors la situation de vote y définie par :

A	B	C	AB	BC	$-$
C	C	B	$-$	$-$	BC
B	A	A	C	A	A
4	2	2	12	1	1

Les scores deviennent alors : $S_{EV}(A,y) = 32$, $S_{EV}(B,y) = 33$ et $S_{EV}(C,y) = 13$, et B devient gagnant ($EV(y) = B$). Ainsi, deux votants (parmi les quatre du type R_6) peuvent coordonner leur action et agir en coalition pour voter stratégiquement et changer le résultat en faveur d'un candidat qu'ils préfèrent au vainqueur du vote sincère (pour ces deux votants on a $EV(y)P(R_6)EV(x)$).

Notons que la situation de vote x peut donner lieu à d'autres possibilités de manipulation coalitionnelle, toujours en faveur de B, contre A. En effet, si le votant du type R_{20} ($-(BC)A$) et l'un des quatre votants du type R_6 (CBA) changent leurs préférences en R_4 (BCA), alors on obtient une nouvelle situation de vote z où les scores sont donnés par : $S_{EV}(A,z) = 32$, $S_{EV}(B,z) = 33$ et $S_{EV}(C,z) = 13$. Le candidat B, qui est préféré à A par le groupe des deux votants manipulateurs, devient gagnant ($EV(z) = B$, $BP(R_{20})A$ et $BP(R_6)A$). En revanche, aucune coalition (de votants qui préfèrent C à A) ne peut, en exprimant des votes non sincères, changer le résultat collectif en faveur de C : la différence de score entre A et C étant de 17 points, en manipulant tous contre A, les votants qui préfèrent C à A ne peuvent réduire cette différence que de 2 points. Notons aussi que si l'ordre lexicographique est retenu pour trancher les cas d'ex aequo, alors x n'offre aucune possibilité de manipulation individuelle contre A en faveur de B : la différence de score entre A et B est de 1 point, et chacun des votants qui ont intérêt à voter stratégiquement en faveur de B (ceux du type R_6 ou de type R_{20}) ne peut réduire cette différence que d'un seul point (l'ordre lexicographique désignera alors A comme vainqueur). Supposons maintenant que la règle de la pluralité (étendue aux préférences trichotomiques) est appliquée. Les scores sont alors : $S_{PR}(A,x) = 10, S_{PR}(B,x) = 7$ et $S_{PR}(C,x) = 5$. Il suffit que les 4 votants du type CBA optent pour le vote stratégique BCA pour changer le résultat en faveur de B. La situation x est donc instable sous PR (d'autres coalitions peuvent aussi manipuler PR en x : par exemple, le groupe constitué du votant du type $(BC) - A$, du votant du type $-(BC)A$, et de deux des quatre votants du type CBA).

Pour finir, on peut vérifier facilement que la règle de l'antipluralité n'est pas manipulable en x et que la règle de Borda est manipulable en x. Sous NPR, nous avons les scores suivants : $S_{NPR}(A,x) = 16$, $S_{NPR}(B,x) = 18$ et $S_{NPR}(C,x) = 10$. On a donc $NPR(x) = B$. Aucune coalition de votants (parmi les 6 préférant A à B) ne peut, en votant stratégiquement, faire gagner plus de points à B ou faire perdre des points à A. De même, les votants qui préfèrent C à B peuvent au plus réduire la différence de score entre B et C de 4 points (en faisant passer B à la dernière place dans les 4 préférences CBA). Avec la règle de Borda, les scores sont : $S_{BR}(A,x) = 26, S_{BR}(B,x) = 25$ et $S_{BR}(C,x) = 15$; donc $BR(x) = A$. Pour manipuler BR en x, en faveur de B contre A, il suffit par exemple que deux des 4 votants du type CBA changent leur préférence en BCA.

Exemple 2. Considérons la situation de vote suivante :

$$x$$

A	B	C	AB	BC	$-$
C	A	B	$-$	A	BC
B	C	A	C	$-$	A
8	8	2	4	2	1

Intéressons-nous d'abord à la manipulabilité de NPR en x. Nous avons les scores suivants : $S_{NPR}(A,x) = 20$, $S_{NPR}(B,x) = 17$ et $S_{NPR}(C,x) = 13$; on a donc $NPR(x) = A$. Parmi tous les votants qui préfèrent B à A, les seuls qui ont la possibilité de manipuler (contre A, en faveur de B) sont les 8 du type BAC (R_3) (dans les préférences CBA, $(BC)A-$ et $-(BC)A$, il n'est pas possible d'augmenter le score de B ou de diminuer le score de A). Ces votants ne peuvent pas augmenter le score de B, mais chacun d'eux est capable de faire baisser le score de A, d'un point ou d'un demi-point (en passant à BCA, $B(AC)-$, ou $B-(AC)$). Tout point (ou demi-point) perdu par A sera gagné par C, il faut donc que l'action de ces votants stratégiques soit suffisante pour que le score de A devienne inférieur au score de B, sans que C passe devant B. On peut alors voir facilement que les seules coalitions possibles qui peuvent changer le résultat du vote en faveur de B sont celles qui font perdre exactement 3,5 points à A (par exemple, 4 votants du type BAC dont trois qui votent BCA et un qui vote $B(AC)-$). En conclusion, NPR est manipulable en x en faveur de A, à condition que seule une partie des manipulateurs potentiels votent stratégiquement, et qu'ils se concertent entre eux avant d'agir, pour éviter de faire gagner C (par exemple si 4 votants du type BAC votent tous BCA, le résultat final sera en faveur de C).

Examinons maintenant les possibilités de manipulation de BR en x. Nous avons les scores suivants : $S_{BR}(A,x) = 30$, $S_{BR}(B,x) = 28{,}5$ et $S_{BR}(C,x) = 16{,}5$; on a donc $BR(x) = A$. Il y a ici plusieurs possibilités de manipulation stratégique en faveur de B. Par exemple, on peut vérifier facilement que chacune des coalitions suivantes peut faire gagner B : le groupe formé des deux votants du type CBA, celui formé des deux votants du type $(BC)A-$ et d'un votant du type CBA, ou encore celui constitué d'un votant de chacun des types $(BC)A-$, $(BC)A-$ et CBA. Dans toutes ces configurations, la stratégie des manipulateurs est plutôt simple, car elle n'exige pas que ces derniers veillent à ce que le score de C ne dépasse pas celui de B : il s'agit simplement de faire gagner des points à B en le mettant seul à la première place (ce qui au passage fait perdre des points à C). Une autre possibilité de manipulation stratégique s'offre aux votants du type BAC. Il suffit que deux d'entre eux votent BCA pour enlever deux points à A et faire gagner B, augmentant au passage le score de C de deux points. En fait, dans ce cas, même si les 8 votants du type BAC optent pour le vote stratégique BCA, il n'y a aucun risque que C passe devant B (au maximum C gagne 8 points et la différence de score entre B et C est de 12 points).

3. Vulnérabilité de EV, PR NPR et BR à la manipulation coalitionnelle

Les deux exemples précédents nous ont permis d'avoir une première idée sur la nature des situations de vote instables sous chacune des quatre règles de vote étudiées. Cependant, cette idée reste très partielle, et il nous faut la description complète et rigoureuse de l'ensemble de ces situations, dans chaque cas, pour pouvoir ensuite évaluer leur fréquence de manière exacte.

3.1. Caractérisation des situations instables

Dans cette sous-section, nous considérons des situations de vote de taille n, nous supposons, sans perte de généralité, que le candidat A est le vainqueur, et nous déterminons les conditions qui caractérisent les situations instables. Rappelons que notre analyse ne porte que sur le cas d'un très grand nombre de votants, et que par conséquent nous ignorons les situations qui donnent lieu à des égalités entre les scores de deux ou trois candidats (le nombre de ces situations tend vers 0 quand n tend vers l'infini).

Pour une situation de vote $x = (n_1, \cdots, n_{24})$, une règle de vote $F \in \{EV, PR, NPR, BR\}$ et deux candidats X et Y dans $\{A, B, C\}$, la différence de score, $\Delta_F(XY, x)$, est définie par :

$$\Delta_F(XY, x) = S_F(X, x) - S_F(Y, x)$$

Notre premier résultat de caractérisation (Proposition 1) concerne la règle de vote par évaluation et la règle de la pluralité. Nous nous intéressons uniquement aux cas où la manipulation a pour objectif de changer le résultat du vote en faveur de B (au détriment de A) ; la symétrie entre les trois candidats nous permettra ensuite de connaitre toutes les situations de vote instables (sous EV, puis sous PR).

Proposition 1.

1) Soit x une situation de vote dans $V(n)$ telle que $EV(x) = A$. Alors EV est manipulable en x, en faveur de B, si et seulement si :

$$\Delta_{EV}(AB, x) < N_1 + N_2 \text{ et } \Delta_{EV}(CB, x) < N_2 + N_3$$

avec $N_1 = n_3 + n_{11} + n_{15}$, $N_2 = n_6 + n_{20} + n_{21}$,

et $N_3 = n_4 + 2n_6 + 2n_{11} + 2n_{12} + n_{15} + n_{20}$

2) Soit x une situation de vote dans $V(n)$ telle que $PR(x) = A$. Alors PR est manipulable en x, en faveur de B, si et seulement si :

$$\Delta_{PR}(AB, x) < N_4$$

avec $N_4 = n_6 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20})$

Preuve

1) Soit x une situation de vote telle que $EV(x) = A$. Les stratégies possibles en faveur de B doivent, bien sûr, viser à faire passer B devant A, mais il peut aussi être nécessaire de faire baisser le score de C (car si $S_{EV}(C,x) > S_{EV}(B,x)$, il n'est pas sûr que l'augmentation du score de B suffirait à elle seule pour que ce score dépasse celui de C) . A l'exception de ceux du type R_{16} $(B-(AC))$, tous les votants qui préfèrent B à A ont la possibilité de manipuler en faveur de B. Pour chacun de ces votants stratégiques, la manipulation maximale consiste à remplacer sa préférence sincère par la préférence R_{16}. On vérifie alors facilement qu'au maximum, le score de B peut augmenter de N_2 points et que les scores de A et de C peuvent baisser de N_1 et N_3 points respectivement.

Supposons que EV soit manipulable en x en faveur de B. Par définition, il existe une situation de vote, y , qui résulte de l'action d'une partie des votants stratégiques et qui vérifie

$$S_{EV}(A,y) < S_{EV}(B,y) \quad (1)$$
$$S_{EV}(C,y) < S_{EV}(B,y) \quad (2)$$

Or, les scores dans y sont donc tels que

$$S_{EV}(A,y) \geq S_{EV}(A,x) - N_1 \quad (3)$$
$$S_{EV}(B,y) \leq S_{EV}(B,x) + N_2 \quad (4)$$
$$S_{EV}(C,y) \geq S_{EV}(C,x) - N_3 \quad (5)$$

Les inégalités (1), (3) et (4) donnent $\Delta_{EV}(AB,x) < N_1 + N_2$, et les inégalités (2), (4) et (5) donnent $\Delta_{EV}(CB,x) < N_2 + N_3$.

Réciproquement, supposons que $\Delta_{EV}(AB,x) < N_1 + N_2$ (1) et $\Delta_{EV}(CB,x) < N_2 + N_3$ (2). L'action de tous les votants stratégiques conduit à une situations y où les scores sont tels que

$$S_{EV}(A,y) = S_{EV}(A,x) - N_1 \quad (3)$$
$$S_{EV}(B,y) = S_{EV}(B,x) + N_2 \quad (4)$$
$$S_{EV}(C,y) = S_{EV}(C,x) - N_3 \quad (5)$$

Par (1), (3) et (4), on obtient $S_{EV}(A,y) < S_{EV}(B,y)$, et par (2), (4) et (5), on obtient $S_{EV}(C,x) < S_{EV}(A,x)$. Donc $EV(y) = B$, ce qui montre que EV est manipulable en x en faveur de B.

2) Soit x une situation de vote telle que $PR(x) = A$. Les votants qui préfèrent B à A et qui ont la possibilité de manipuler en faveur de B sont ceux du type R_6, qui peuvent chacun augmenter le score de B d'un point (au maximum), et ceux du type R_{11}, R_{12} et R_{20}, qui peuvent chacun augmenter le score de B d'un demi-point. L'action de ces votants stratégiques laisse le score de

A inchangé et enlève à C les points qu'elle fait gagner à B. Au maximum, le nombre de ces points est $N_4 = n_6 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20})$.

Supposons que PR soit manipulable en x en faveur de B. Il existe une situation de vote, y , qui résulte de l'action d'une partie des votants stratégiques et qui vérifie $PR(y) = B$. En particulier, on a

$$S_{PR}(A, y) < S_{PR}(B, y) \quad (1)$$

Or, les scores de A et B dans y sont donc tels que

$$S_{PR}(A, y) = S_{PR}(A, x) \qquad (2)$$

$$S_{PR}(B, y) \leq S_{PR}(B, x) + N_4 \quad (3)$$

Il vient alors, de (1), (2) et (3), que $\Delta_{PR}(AB, x) < N_4$.

Réciproquement, supposons que $\Delta_{PR}(AB, x) < N_4$ (1). Si tous les votants stratégiques agissent pour augmenter au maximum le score de B, alors on obtient une situation y où les scores sont tels que :

$$S_{PR}(A, y) = S_{PR}(A, x) \qquad (2)$$

$$S_{PR}(B, y) = S_{PR}(B, x) + N_4 \quad (3)$$

$$S_{PR}(C, y) \leq S_{PR}(C, x) \qquad (4)$$

Par (1), (2) et (3), on obtient $S_{PR}(A, y) < S_{PR}(B, y)$ (5). D'autre part, on sait que $S_{PR}(C, x) \leq$ $< S_{PR}(A, x)$, car $PR(x) = A$. Par (4) et (5), on obtient alors $S_{PR}(C, y) < S_{PR}(B, y)$ (6). Les inégalités (5) et (6) montrent que $PR(y) = B$, et donc que PR est manipulable en x. ■

Notre deuxième résultat de caractérisation (Proposition 2) concerne la règle de l'antipluralité et la règle de Borda. Comme pour le premier résultat, il permet, en utilisant la symétrie entre les trois candidats, d'identifier toutes les situations de vote où chacune de ces deux règles de vote est manipulable par une coalition de votants.

Proposition 2.

1) Soit x une situation de vote dans $V(n)$ telle que $NPR(x) = A$. Alors NPR est manipulable en x, en faveur de B, si et seulement si :

$\Delta_{NPR}(AB, x) < \Delta_{NPR}(BC, x)$ et $\Delta_{NPR}(AB, x) < N_1$, avec $N_1 = n_3 + \frac{1}{2}(n_{15} + n_{16} + n_{21})$.

2) Soit x une situation de vote dans $V(n)$ telle que $BR(x) = A$. Alors BR est manipulable en x, en faveur de B, si et seulement si :

$\Delta_{BR}(AB, x) < N_2$ ou

($\Delta_{BR}(AB, x) \geq N_2$ et $\Delta_{BR}(AB, x) < N_2 + N_3$ et $\Delta_{BR}(AB, x) \leq \Delta_{BR}(BC, x) + 3N_2$),

avec $N_2 = n_6 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20})$ et $N_3 = n_3 + \frac{1}{2}(n_{15} + n_{16} + n_{21})$

Preuve

1) Soit x une situation de vote telle que $NPR(x) = A$. La seule stratégie possible en faveur de B est de faire baisser le score de A. En effet, on vérifie facilement qu'il n'est pas possible pour les votants qui préfèrent B à A d'augmenter le score de B (car B n'est jamais classé dernier), et qu'il est alors inutile d'enlever des points à C (car ces points seront gagnés par A). Les votants stratégiques sont donc ceux du type R_3 qui peuvent chacun faire baisser le score de A d'un point au maximum (en passant à R_4), et ceux du type R_{15}, R_{16} et R_{21}, qui peuvent chacun faire baisser le score de A d'un demi-point (en passant à R_4). Ainsi, suite à l'action d'un groupe manipulateur, B conserve son score, et A perd des points que C récupère ; le nombre maximum de ces points est $N_1 = n_3 + \frac{1}{2}(n_{15} + n_{16} + n_{21})$.

Supposons que NPR soit manipulable en x en faveur de B. Par définition, il existe une situation de vote, y , qui résulte de l'action d'une partie des votants stratégiques et qui vérifie

$$S_{NPR}(A, y) < S_{NPR}(B, y) \quad (1)$$

$$S_{NPR}(C, y) < S_{NPR}(B, y) \quad (2)$$

Soit δ le nombre de points perdus par A et gagnés par C. On a $0 < \delta \leq N_1$, et

$$S_{NPR}(A, y) = S_{NPR}(A, x) - \delta \quad (3)$$

$$S_{NPR}(B, y) = S_{NPR}(B, x) \quad (4)$$

$$S_{NPR}(C, y) = S_{NPR}(C, x) + \delta \quad (5)$$

En utilisant (1), (3) et (4) on obtient $\Delta_{NPR}(AB, x) < \delta$ (6). Or $\delta \leq N_1$, donc (6) nous donne $\Delta_{NPR}(AB, x) < N_1$. D'autre part, (2), (4) et (5) donnent $\Delta_{NPR}(BC, x) > \delta$. En tenant compte de (6), on obtient alors $\Delta_{NPR}(BC, x) > \Delta_{NPR}(AB, x)$.

Réciproquement, supposons que $\Delta_{NPR}(AB, x) < N_1$ (1) et $\Delta_{NPR}(AB, x) < \Delta_{NPR}(BC, x)$ (2). L'action de tous les votants stratégiques conduit à une situation y où les scores sont

$$S_{NPR}(A, y) = S_{NPR}(A, x) - N_1 \quad (3)$$

$$S_{NPR}(B, y) = S_{NPR}(B, x) \quad (4)$$

$$S_{NPR}(C, y) = S_{NPR}(C, x) + N_1 \quad (5)$$

Par (1), (3) et (4), on obtient $S_{NPR}(A, y) < S_{NPR}(B, y)$ (6). Par (4) et (5), on a $S_{NPR}(B, y) - S_{NPR}(C, y) = \Delta_{NPR}(BC, x) - N_1$. En utilisant (1), on alors $S_{NPR}(B, y) - S_{NPR}(C, y) > \Delta_{NPR}(BC, x) - \Delta_{NPR}(AB, x)$, et en utilisant (2), on obtient $S_{NPR}(B, y) - S_{NPR}(C, y) > 0$. (6) et (7) montrent que $NPR(x) = B$, est donc que NPR est manipulable en x en faveur de B.

2) Soit x une situation de vote telle que $BR(x) = A$. Les stratégies possibles en faveur de B sont celles qui permettent d'augmenter le score de B ou de baisser le score de A. Notons que les points perdus par C ne sont utiles (pour faire gagner B) que lorsqu'ils sont récupérés par B (dans le cas contraire, ces points seront gagnés par A).

Les votants qui préfèrent B à A et qui ont la possibilité d'augmenter le score de B sont ceux du type R_6, R_{11}, R_{12} et R_{20}. L'action de ces votants stratégiques laisse le score de A inchangé et enlève à C les points qu'elle fait gagner à B. Au maximum, le nombre de ces points est $N_2 = n_6 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20})$. Les votants qui préfèrent B à A et qui ont la possibilité de baisser le score de A sont ceux du type R_3, R_{15}, R_{16} et R_{21}. L'action de ces votants stratégiques laisse le score de B inchangé et fait gagner à C les points qu'elle enlève à A. Au maximum, le nombre de ces points est $N_3 = n_3 + \frac{1}{2}(n_{15} + n_{16} + n_{21})$.

Supposons que BR soit manipulable en x en faveur de B. Par définition, il existe une situation de vote, y , qui résulte de l'action d'une partie des votants stratégiques et dans laquelle B est le gagnant :

$$S_{BR}(A,y) < S_{BR}(B,y) \quad (1)$$

$$S_{BR}(C,y) < S_{BR}(B,y) \quad (2)$$

On distingue deux cas : soit l'action des votants du type R_6, R_{11}, R_{12} et R_{20} suffit à elle seule à faire gagner B, soit cette action n'est pas suffisante. Dans le premier cas, le score de A ne change pas, et donc la différence de scores entre A et B doit être inférieure au nombre maximum de points que B peut gagner. Il est donc nécessaire d'avoir $\Delta_{BR}(AB,x) < N_2$. Dans le second cas, on a $\Delta_{BR}(AB,x) \geq N_2$; la coalition manipulatrice doit donc contenir une partie des votants du type R_3, R_{15}, R_{16} et R_{21}, en plus de tous ceux du type R_6, R_{11}, R_{12} et R_{20}.

Soit δ le nombre de points perdus par A et gagnés par C. On a $0 < \delta \leq N_3$, et

$$S_{BR}(A,y) = S_{BR}(A,x) - \delta \quad (3)$$

$$S_{BR}(B,y) = S_{BR}(B,x) + N_2 \quad (4)$$

$$S_{BR}(C,y) = S_{BR}(C,x) - N_2 + \delta \quad (5)$$

En utilisant (1), (3) et (4) on obtient $\Delta_{BR}(AB,x) < N_2 + \delta$ (6). Or $\delta \leq N_3$, donc (6) nous donne $\Delta_{BR}(AB,x) < N_2 + N_3$. D'autre part, (2), (4) et (5) donnent $\Delta_{BR}(BC,x) + 2N_2 > \delta$. En tenant compte de (6), on obtient alors $\Delta_{BR}(BC,x) + 2N_2 > \Delta_{BR}(AB,x) - N_2$, d'où $\Delta_{BR}(AB,x) < \Delta_{BR}(AB,x) + 3N_2$.

Réciproquement, supposons d'abord que $\Delta_{BR}(AB,x) < N_2$ (1). L'action de tous les votants du type R_6, R_{11}, R_{12} et R_{20} conduit à une situation de vote y où les scores sont tels que :

$$S_{BR}(A,y) = S_{BR}(A,x) \quad (3)$$

$$S_{BR}(B, y) = S_{BR}(B, x) + N_2 \quad (4)$$
$$S_{BR}(C, y) = S_{BR}(C, x) - N_2 \quad (5)$$

Par (1), (3) et (4), on obtient $\Delta_{BR}(AB, y) < 0$ (6). Par (3), (5) et par le fait que $S_{BR}(C, x) < S_{BR}(A, x)$ (car $BR(x) = A$), on obtient $S_{BR}(C, y) < S_{BR}(A, y)$; et en utilisant (6) on obtient $S_{BR}(C, y) < S_{BR}(B, y)$ (7). Enfin, d'après (6) et (7), on a $BR(y) = B$, ce qui montre que BR est manipulable en x.

Supposons maintenant que $\Delta_{BR}(AB, x) \geq N_2$ (1), $\Delta_{BR}(AB, x) < N_2 + N_3$ (2) et $\Delta_{BR}(AB, x) \leq \Delta_{BR}(BC, x) + 3N_2$ (3). L'action de tous les votants stratégiques conduit à une situation de vote y où les scores sont tels que :

$$S_{BR}(A, y) = S_{BR}(A, x) - N_2 \quad (4)$$
$$S_{BR}(B, y) = S_{BR}(B, x) + N_2 \quad (5)$$
$$S_{BR}(C, y) = S_{BR}(C, x) - N_2 + N_3 \quad (6)$$

Par (2), (4) et (5), on obtient $\Delta_{BR}(AB, y) < 0$ (7). Par (5) et (6), on obtient $\Delta_{BR}(BC, y) = \Delta_{BR}(BC, x) + 2N_2 + N_3$. En utilisant (3), on a alors $\Delta_{BR}(BC, y) > \Delta_{BR}(AB, x) - N_2 - N_3$; et, par (1) on a $\Delta_{BR}(BC, y) > 0$ (8). Ainsi, par (7) et (8), on a $BR(y) = B$, ce qui monte que BR est manipulable en x. ■

3.2. Résultats probabilistes : fréquences théoriques des situations instables

Pour une règle vote F et un entier naturel n $(n \geq 2)$, nous noterons $\Pr(Manip, F, n)$ la probabilité que F soit manipulable par une coalition de votants en une situation de vote de taille n. Cette probabilité définit la vulnérabilité de F à la manipulation coalitionnelle (en présence de n votants). La limite de $\Pr(Manip, F\, n)$ quand n tend vers l'infini sera notée $\Pr(Manip, F, \infty)$. Nous supposons que toutes les situations de vote sont équiprobables (Impartial Anonymous Culture, IAC).

Comme nous l'avons indiqué dans El Ouafdi et al. (2017), même lorsqu'il est possible d'obtenir les expressions exactes, en fonction du paramètre n, des probabilités des évènements de vote pour trois candidats dans le cadre des préférences trichotomiques, ces représentations analytiques sont généralement peu exploitables (en raison de la très grande période des quasi-polynômes obtenus). Par conséquent, nous nous intéressons, dans ce qui suit, uniquement à la valeur limite de la vulnérabilité des quatre règles étudiées. Tous les résultats présentés dans cette sous-section ont été obtenus en appliquant une nouvelle méthode de calcul (qui sera décrite dans la section 4) et vérifiés par l'application du programme [Normaliz].

- Vote par évaluation :

Rappelons que, pour une situation de vote $x = (n_1, \cdots, n_{24})$, les scores des trois candidats sont donnés par :

$S_{EV}(A,x) = 2(n_1 + n_2 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{13} + n_{14}) + (n_3 + n_5 + n_{11} + n_{15} + n_{17} + n_{19} + n_{22} + n_{24})$

$S_{EV}(B,x) = 2(n_3 + n_4 + n_7 + n_8 + n_{11} + n_{12} + n_{15} + n_{16}) + (n_1 + n_6 + n_9 + n_{13} + n_{17} + n_{20} + n_{21} + n_{24})$

$S_{EV}(C,x) = 2(n_5 + n_6 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{17} + n_{18}) + (n_2 + n_4 + n_7 + n_{13} + n_{15} + n_{20} + n_{22} + n_{23})$

D'après la proposition 1, l'ensemble des situations de vote, $x \in V(n)$, où EV est manipulable en faveur de B (et contre A) est caractérisé par le système suivant :

$$(S^{EV}(n)) \quad \begin{cases} n_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{EV}(AB,x) > 0 \\ \Delta_{EV}(AC,x) > 0 \\ \Delta_{EV}(AB,x) < (n_3 + n_{11} + n_{15}) + (n_6 + n_{20} + n_{21}) \\ \Delta_{EV}(CB,x) < (n_6 + n_{20} + n_{21}) + (n_4 + 2n_6 + +2n_{11} + 2n_{12} + n_{15} + n_{20}) \end{cases}$$

En utilisant à nouveau la proposition 1, et la symétrie entre les candidats B et C, on obtient la caractérisation des situations de vote x où EV est manipulable en faveur de C (contre A) :

$$(T^{EV}(n)) \quad \begin{cases} n_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{EV}(AB,x) > 0 \\ \Delta_{EV}(AC,x) > 0 \\ \Delta_{EV}(AC,x) < (n_5 + n_{11} + n_{17}) + (n_4 + n_{20} + n_{23}) \\ \Delta_{EV}(BC,x) < (n_4 + n_{20} + n_{23}) + (2n_4 + n_6 + 2n_{11} + 2n_{12} + n_{17} + n_{20}) \end{cases}$$

Soit V_1^{EV} le volume associé à $(S^{EV}(n))$, V_2^{EV} le volume associé à $(T^{EV}(n))$, et V_3^{EV} le volume associé à l'intersection caractérisée par ($S^{EV}(n)$ et) $T^{EV}(n)$. Ici, on prend en compte le volume V_3^{EV}, car (*a priori*) on peut trouver des situations de vote où EV est à la fois manipulable en faveur de B (contre A) et manipulable en faveur de C (contre A).

Soit V_s le volume décrivant toutes les situations de vote possibles. On a alors, par symétrie entre les trois candidats, puis par symétrie entre B et C :

$$\Pr(Manip, EV, \infty) = \frac{3(V_1^{EV} + V_2^{EV} - V_3^{EV})}{V_s} \qquad (E_1)$$

$$= \frac{3(2V_1^{EV} - V_3^{EV})}{V_s}$$

On sait que $V_s = 1/23!$, et on obtient en appliquant notre nouvelle méthode :

$$V_1^{EV} = \frac{165744483491852061147591496513}{24142160016462623142975523180781764608000000000000000}$$

$$V_3^{EV} = \frac{2751530613286653365418469576994621521}{659807369831084947439669201864567125922807808000000000000000}$$

En remplaçant dans (E_1), on obtient la valeur limite de la vulnérabilité de EV à la manipulation coalitionnelle :

$$\Pr(Manip, EV3, \infty) = \frac{2816112585335517122644511047366447}{3797986884438825459140760000000000} \approx 74.14\%$$

- Pluralité :

Pour une situation de vote $x = (n_1, \cdots, n_{24})$, les scores des trois candidats sont donnés par :

$$\begin{gathered}
S_{PR}(A,x) = (n_1 + n_2 + n_{13} + n_{14} + n_{19}) + \tfrac{1}{2}(n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{22} + n_{24}) \\
S_{PR}(B,x) = (n_3 + n_4 + n_{15} + n_{16} + n_{21}) + \tfrac{1}{2}(n_7 + n_8 + n_{11} + n_{12} + n_{20} + n_{24}) \\
S_{PR}(C,x) = (n_5 + n_6 + n_{17} + n_{18} + n_{23}) + \tfrac{1}{2}(n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{20} + n_{22})
\end{gathered}$$

D'après la proposition 1, l'ensemble des situations de vote, $x \in V(n)$, où PR est manipulable en faveur de B (et contre A) est caractérisé par le système suivant :

$$(S^{PR}(n)) \quad \begin{cases} n_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{PR}(AB, x) > 0 \\ \Delta_{PR}(AC, x) > 0 \\ \Delta_{PR}(AB, x) < n_6 + \tfrac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20}) \end{cases}$$

En utilisant à nouveau la proposition 1, et la symétrie entre les candidats B et C, on obtient la caractérisation des situations de vote x où PR est manipulable en faveur de C (contre A) :

$$(T^{PR}(n)) \quad \begin{cases} n_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{PR}(AB, x) > 0 \\ \Delta_{PR}(AC, x) > 0 \\ \Delta_{PR}(AC, x) < n_4 + \tfrac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20}) \end{cases}$$

Soient V_1^{PR} le volume associé à $(S^{PR}(n))$, V_2^{PR} le volume associé à $(T^{PR}(n))$, et V_3^{PR} le volume associé à l'intersection caractérisée par $(S^{PR}(n)$ et $(T^{PR}(n))$. Comme pour EV, le volume V_3^{PR} est (*a priori*) non nul. Par symétrie entre les trois candidats, puis par symétrie entre B et C, nous avons :

$$\Pr(Manip, PR, \infty) = \frac{3(2V_1^{PR} - V_3^{PR})}{V_s} \qquad (E_2)$$

$$= 23! \times 3(2V_1^{PR} - V_3^{PR})$$

Les calculs nous donnent :

$$V_1^{PR} = \frac{33963995124768598967076553943}{67398396800062276255423924880829742841856000000000000}$$

$$V_3^{PR} = \frac{6558557237418605597621932401471061}{2149587617941986223321426804167963610762444800000000000000}$$

En remplaçant dans (E_2), on obtient la valeur limite de la vulnérabilité de PR à la manipulation coalitionnelle :

$$\Pr(Manip, PR, \infty) = \frac{4539130454565253746545079460613}{8328295976442566604480000000000} \approx 54.5\%$$

- Antipluralité :

Pour une situation de vote $x = (n_1, \cdots, n_{24})$, les scores des trois candidats sont donnés par :

$$S_{NPR}(A, x) = n - [(n_4 + n_6 + n_{11} + n_{12} + n_{20}) + \tfrac{1}{2}(n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18} + n_{21} + n_{23})]$$
$$S_{NPR}(B, x) = n - [(n_2 + n_5 + n_9 + n_{10} + n_{22}) + \tfrac{1}{2}(n_{13} + n_{14} + n_{17} + n_{18} + n_{19} + n_{23})]$$
$$S_{NPR}(C, x) = n - [(n_1 + n_3 + n_7 + n_8 + n_{24}) + \tfrac{1}{2}(n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{19} + n_{21})]$$

D'après la proposition 2, l'ensemble des situations de vote, $x \in V(n)$, où NPR est manipulable en faveur de B (et contre A) est caractérisé par le système suivant :

$$
(S^{NPR}(n)) \quad \begin{cases} n_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{NPR}(AB, x) > 0 \\ \Delta_{NPR}(AC, x) > 0 \\ \Delta_{NPR}(AB, x) < \Delta_{NPR}(BC, x) \\ \Delta_{NPR}(AB, x) < n_3 + \dfrac{1}{2}(n_{15} + n_{16} + n_{21}) \end{cases}
$$

De même, les situations de vote, $x \in V(n)$, où NPR est manipulable en faveur de C (et contre A) est caractérisé par le système suivant :

$$
(T^{NPR}(n)) \quad \begin{cases} n_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{NPR}(AB, x) > 0 \\ \Delta_{NPR}(AC, x) > 0 \\ \Delta_{NPR}(AC, x) < \Delta_{NPR}(CB, x) \\ \Delta_{NPR}(AC, x) < n_5 + \dfrac{1}{2}(n_{17} + n_{18} + n_{23}) \end{cases}
$$

Soient V_1^{NPR} le volume associé à $S^{NPR}(n)$ et V_2^{NPR} le volume associé à $T^{NPR}(n)$. L'intersection caractérisée par ($S^{NPR}(n)$ et $T^{NPR}(n)$) est vide. En effet, comme $\Delta_{NPR}(BC, x) = -\Delta_{NPR}(CB, x)$, l'une des différences, $\Delta_{NPR}(BC, x)$ ou $\Delta_{NPR}(CB, x)$, est négative ; et comme A est le gagnant dans x, on ne peut avoir à la fois $\Delta_{NPR}(AB, x) < \Delta_{NPR}(BC, x)$ et $\Delta_{NPR}(AC, x) < \Delta_{NPR}(CB, x)$.

D'autre part, la symétrie entre B et C nous donne a $V_1^{NPR} = V_2^{NPR}$. En utilisant la symétrie entre les trois candidats, on a alors :

$$
\Pr(Manip, NPR, \infty) = \frac{3(2V_1^{NPR})}{V_s} = 23! \times 6V_1^{NPR} \qquad (E_3)
$$

Après calcul, on obtient :

$$
V_1^{NPR} = \frac{15415206887}{486758206977489144080647520256 0000}
$$

En remplaçant dans (E_3), on obtient la valeur limite de la vulnérabilité de NPR à la manipulation coalitionnelle :

$$
\Pr(Manip, NPR, \infty) = \frac{15415206887}{31381059609} \approx 49.12\%
$$

- Borda :

Pour une situation de vote $x = (n_1, \cdots, n_{24})$, les scores des trois candidats sont donnés par :

$$S_{BR}(A,x) = 2(n_1+n_2+n_{13}+n_{14}+n_{19}) + \frac{3}{2}(n_7+n_8+n_9+n_{10}+n_{22}+n_{24})$$
$$+(n_3+n_5) + \frac{1}{2}(n_{15}+n_{16}+n_{17}+n_{18}+n_{21}+n_{23})$$
$$S_{BR}(B,x) = 2(n_3+n_4+n_{15}+n_{16}+n_{21}) + \frac{3}{2}(n_7+n_8+n_{11}+n_{12}+n_{20}+n_{24})$$
$$+(n_1+n_6) + \frac{1}{2}(n_{13}+n_{14}+n_{17}+n_{18}+n_{19}+n_{23})$$
$$S_{BR}(C,x) = 2(n_5+n_6+n_{17}+n_{18}+n_{23}) + \frac{3}{2}(n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}+n_{20}+n_{22})$$
$$+(n_2+n_4) + \frac{1}{2}(n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}+n_{19}+n_{21})$$

D'après la proposition 2, les situations de vote, $x \in V(n)$, où BR est manipulable en faveur de B (et contre A) sont caractérisées par :

$$(S_1^{BR}(n)) \begin{cases} n_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{BR}(AB,x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AC,x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AB,x) < n_6 + \frac{1}{2}(n_{11}+n_{12}+n_{20}) \end{cases}$$

Ou

$$(S_2^{BR}(n)) \begin{cases} n_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{BR}(AB,x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AC,x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AB,x) \geq n_6 + \frac{1}{2}(n_{11}+n_{12}+n_{20}) \\ \Delta_{BR}(AB,x) < n_3 + \frac{1}{2}(n_{15}+n_{16}+n_{21}) + n_6 + \frac{1}{2}(n_{11}+n_{12}+n_{20}) \\ \Delta_{BR}(AB,x) \leq \Delta_{BR}(BC,x) + 3(n_6 + \frac{1}{2}(n_{11}+n_{12}+n_{20})) \end{cases}$$

De même, les situations de vote, $x \in V(n)$, où BR est manipulable en faveur de C (et contre A) sont caractérisées par :

$$(T_1^{BR}(n)) \begin{cases} n_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{BR}(AB,x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AC,x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AC,x) < n_4 + \frac{1}{2}(n_{11}+n_{12}+n_{20}) \end{cases}$$

Ou

$$(T_2^{BR}(n)) \begin{cases} n_i \geq 0,\ \ i = 1, \dots, 24 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{24} = n \\ \Delta_{BR}(AB, x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AC, x) > 0 \\ \Delta_{BR}(AC, x) \geq n_4 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20}) \\ \Delta_{BR}(AC, x) < n_4 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20}) + n_5 + \frac{1}{2}(n_{17} + n_{18} + n_{23}) \\ \Delta_{BR}(AC, x) \leq \Delta_{BR}(CB, x) + 3(n_4 + \frac{1}{2}(n_{11} + n_{12} + n_{20})) \end{cases}$$

Soient V_1^{BR}, V_2^{BR}, V_3^{BR}et V_4^{BR} les volumes associés à $(S_1^{BR}(n))$, $(S_2^{BR}(n))$, $(T_1^{BR}(n))$ et $(T_2^{BR}(n))$, respectivement. On vérifie facilement que les intersections caractérisées par $(S_1^{BR}(n)$ et $S_2^{BR}(n))$ et par $(T_1^{BR}(n)$ et $T_2^{BR}(n))$ sont vides. Notons V_5^{BR}, V_6^{BR}, V_7^{BR} et V_8^{BR} les volumes associés aux intersections caractérisées respectivement par $(S_1^{BR}(n)$ et $T_1^{BR}(n))$, $(S_1^{BR}(n)$ et $T_2^{BR}(n))$, $(S_2^{BR}(n)$ et $T_1^{BR}(n))$ et $(S_2^{BR}(n)$ et $T_2^{BR}(n))$. Par symétrie entre B et C, on a : $V_1^{BR} = V_3^{BR}$, $V_2^{BR} = V_4^{BR}$ et $V_6^{BR} = V_7^{BR}$. En utilisant la symétrie entre les trois candidats, on obtient :

$$\Pr(Manip, BR, \infty) = 23! \times 3(2V_1^{BR} + 2V_2^{BR} - V_5^{BR} - 2V_6^{BR} - V_8^{BR}) \qquad (E_4)$$

Nous avons calculé tous les volumes qui apparaissent dans cette formule. Les valeurs exactes de ces volumes et la valeur exacte de $\Pr(Manip, BR, \infty)$ comportent un très grand nombre de chiffres et sont données dans l'annexe de ce document. On obtient la valeur approchée suivante :

$$\Pr(Manip, BR, \infty) \approx 65.36\%$$

Les chiffres obtenus confirment le caractère "très" manipulable de la règle EV puisque les 3/4 des situations de vote sont instables pour cette règle, contre (environ) 2/3 pour BR et 1/2 pour PR et NPR. Si l'on compare nos résultats à ceux qu'ont obtenus Favardin et Lepelley (2006) dans le cadre de préférences linéaires, on note aussi que le passage aux préférences trichotomiques modifie très nettement la hiérarchie des règles positionnelles, au détriment de BR et (surtout) de PR, et au profit de NPR, comme l'indique la table ci-dessous.

	PR	NPR	BR	EV
Préférences trichotomiques	54.5%	49.1%	65.4%	74.1%
Préférences linéaires	29.2%	51.9%	50.2%	-

Table 1. Vulnérabilité à la manipulation coalitionnelle

Il convient enfin de souligner que nous avons supposé ici un comportement "naïf" de la part des votants, qui ne réagissent pas lorsqu'ils sont en présence d'une menace de manipulation. On sait (Favardin et Lepelley, 2006) que la prise en compte des ces "réactions" est susceptible de changer la hiérarchie des règles ; par exemple, elle réduit la manipulabilité de BR à un niveau inférieur à celui de PR. Nous conjecturons que cette prise en compte pourrait, de la même manière, réduire significativement la vulnérabilité de EV à la manipulation coalitionnelle.

4. Considérations méthodologiques

Dans cette section, nous donnons une brève description de la méthode que nous avons utilisée pour obtenir les résultats de la section précédente. Comme nous l'avons déjà indiqué, ces résultats limites ont été vérifiés et confirmés en recalculant, avec [Normaliz], tous les volumes associés aux événements de vote étudiés dans ce papier. Dans toute la suite, nous noterons M2 la méthode que nous présentons ici, et M1 la méthode proposée dans El Ouafdi et al. (2019). En suggérant la méthode M2, après avoir proposé M1, nous souhaitons contribuer à élargir l'ensemble des techniques de calcul de probabilités sous la condition IAC et proposer des pistes de recherche qui pourraient conduire à des méthodes applicables à des problèmes de vote avec cinq candidats (dans le cas des préférences linéaires). La technique de calcul que nous présentons ici (M2) nous parait à la fois simple et prometteuse. Tout comme M1, elle permet de calculer des volumes de polytopes rationnels de dimension 23, et repose sur un usage combiné des programmes [LattE] et [Lrs]. Cependant, à la différence de M1, le volume d'un polytope rationnel Q, associé un système linéaire paramétrique $S(n)$, s'obtient (avec M2) simplement en calculant le nombre de solutions entières de $S(n)$ pour une seule valeur (bien choisie) du paramètre n. Pour rendre plus précise cette idée, nous avons besoin de la notation suivante. Pour un nombre réel x, nous désignerons par $\lfloor x \rceil$ l'entier le plus proche de x : soit n l'unique entier tel que $n \leq x < n + 1$, alors $\lfloor x \rceil = n$ si $x - n < 1/2$ et $\lfloor x \rceil = n + 1$ si $x - n > 1/2$ (nous n'aurons pas besoin de définir $\lfloor x \rceil$ pour $x - n = 1/2$). Nous pouvons maintenant formuler l'idée de base de la méthode M2.

Proposition 3. Soit $F(t)$ un polynôme de degré d à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$F(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0$$

Soit M un majorant de toutes les valeurs absolues des coefficients c_r, pour $0 \leq r \leq d - 1$. On a alors : $\lfloor F(t)/t^d \rceil = c_d, \forall\, t \geq 2M+1$.

Preuve

Pour $t > 0$, on a :

$$\frac{F(t)}{t^d} = c_d + \frac{c_{d-1}t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0}{t^d} \qquad (1)$$

Posons $R(t) = \frac{c_{d-1}t^{d-1}+\cdots+c_1t+c_0}{t^d}$. Comme $|c_r| \leq M$, pour $0 \leq r \leq d-1$, on a, pour $t > 1$:

$$|R(t)| \leq \frac{|c_{d-1}|t^{d-1} + \cdots + |c_1|t + |c_0|}{t^d} \leq \frac{M\sum_{i=0}^{d-1} t^i}{t} = \frac{M(t^d - 1)}{t^d(t-1)} < \frac{M}{t-1}$$

La fonction φ définie par $\varphi(t) = M/(t-1)$ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et vérifie $\varphi(2M+1) = 1/2$. On peut donc écrire : $\forall\, t \geq 2M+1, 0 \leq |R(t)| < 1/2$. En prenant l'entier le proche dans les deux membres de l'égalité (1), on obtient : $\left\lfloor \frac{F(t)}{t^d} \right\rceil = c_d, \forall\, t \geq 2M+1$. ■

Considérons maintenant un polytope rationnel, Q, associé à un système paramétrique, $S(n)$, décrivant un évènement de vote $E(n,m)$, impliquant n votants et m candidats (avec m fixé). Comme nous l'avons déjà vu, $S(n)$ est constitué de l'égalité $\sum_{i=1}^{m!} n_i = 1$, des contraintes de non négativité ($n_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m!$), et d'un certain nombre d'inégalités linéaires à coefficients rationnels en n_1, …, $n_{m!}$ et n. Le polytope Q est décrit par le système $S(1)$, sa dimension est $d = m! - 1$ et il est inclus dans le simplexe standard, $\Delta = \left\{(x_0, \dots, x_d) : \sum_{i=0}^{d} x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i = 0, \dots, d\right\}$ dont le volume est égal à $1/d!$. On a donc :

$$\mathrm{Vol}(Q) \leq 1/d! \qquad (1)$$

Pour obtenir la valeur exacte de $\mathrm{Vol}(Q)$, nous procédons de la manière suivante :

1. Comme dans la méthode M1, nous considérons le polytope P défini par $P = \delta Q$ (dilatation de Q par le facteur δ), où δ est un multiple de la période du quasi-polynôme décrivant le nombre de solutions entières de $S(n)$. Le nombre δ peut-être obtenu en appliquant l'algorithme [Lrs]. Le polytope P est alors entier (i.e., tous ses sommets sont à coordonnées entières). On sait, d'après le théorème d'Ehrhart (1962), que le nombre de points entiers du polytope dilaté nP est décrit par un simple polynôme (polynôme d'Ehrhart) à coefficients rationnels, que nous désignerons par $G(n)$.
2. En multipliant $G(n)$ par $d!$, on obtient un polynôme, $F(n)$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $F(n) = d!\,G(n)$. On a alors $F(n) = c_d n^d + c_{d-1}n^{d-1} + \cdots + c_1 n + c_0$, avec :

$$c_d = d!\,\delta^d\,\mathrm{Vol}(Q) \qquad (2)$$

On peut maintenant appliquer la proposition 3 au polynôme $F(n)$. Pour cela, nous utilisons une majoration issue des résultat de Beck et al. (2005) sur les coefficients des polynômes d'Ehrhart : pour $0 \leq r \leq d-1$, $|c_r| \leq c_d(d+1)!$. En utilisant (1) et (2), on obtient : $|c_r| \leq M = \delta^d(d+1)!, \quad \forall\, 0 \leq r \leq d-1$. On a alors, d'après la proposition 3 :

$$c_d = \left\lfloor \frac{F(n)}{n^d} \right\rceil, \forall\, n > k = 2\delta^d(d+1)! + 1 \qquad (3)$$

3. Pour trouver la valeur de l'entier positif c_d, on applique le programme [LattE] (commande « count ») pour calculer $G(n)$ pour un entier n dépassant le seuil k et on retient l'entier le plus proche du nombre $F(n)/n^d$ ($F(n) = d!\, G(n)$). Il suffit ensuite d'utiliser l'égalité (2) pour déduire la valeur exacte du volume du polytope Q : $\mathrm{Vol}(Q) = c_d/(d!\,\delta^d)$ (4)

Pour obtenir les résultats de la sous-section 3.2, en utilisant la méthode M2, nous avons, à chaque fois, appliqué la formule (3) avec $n = 3\delta^d(d+1)!$ (ainsi, n est un multiple de δ, et donc un multiple de la période de Q , ce qui permet de faciliter le calcul de $G(n)$ par le programme [LattE]. Par souci de simplicité, nous ne donnons ici que les détails du calcul de la vulnérabilité limite de NPR à la manipulation coalitionnelle (c'est le cas le plus simple), les autres résultats s'obtiennent de la même manière.

Soit Q le polytope rationnel associé au système $S^{NPR}(n)$, i.e., Q est décrit par le système $S^{NPR}(1)$. Dans la sous-section 3.2, nous avons noté V_1^{NPR} le volume de Q, et nous avons montré que : $\Pr(Manip, NPR, \infty) = 23! \times 6V_1^{NPR}$ (E_3). Pour calculer V_1^{NPR}, nous avons procédé comme suit :

- On applique le programme [Lrs] pour trouver un multiple δ de la période de Q (Ici Q est de dimension $d = 23$). On trouve $\delta = 6$.
- On applique |LattE] pour calculer $G(n)$ pour $n = 3\delta^d(d+1)! = 3 \times 6^{23} \times (24!)$. On trouve une valeur de $G(n)$ qu'il n'est pas possible d'exhiber ici (elle comporte 947 chiffres, voir Annexe). Avec cette valeur, on a :

$$c_d = \left\lfloor \frac{F(n)}{n^d} \right\rceil = \left\lfloor \frac{d!\, G(3\delta^d(d+1)!)}{(3\delta^d(d+1)!)^d} \right\rceil = \left\lfloor \frac{23!\, G(3 \times 6^{23} \times (24!))}{(3 \times 6^{23} \times 24!)^{23}} \right\rceil$$

  On trouve : $c_d = 64656063906971648$
- En appliquant la formule (4), on a alors :

$$V_1^{NPR} = \frac{c_d}{d!\,\delta^{23}} = \frac{15415206887}{4867582069774891440806475202560000}$$

- Enfin, en utilisant la formule (E_3), on trouve :

$$\Pr(Manip, NPR, \infty) = \frac{15415206887}{31381059609} \approx 49.12\%$$

Nous clôturons cette section par quelques remarques sur la méthode M2 et ses possibles généralisations :

- Soit Q un polytope rationnel et soit $H(n)$ le quasi-polynôme décrivant le nombre de points entiers dans la dilatation nQ. On montre facilement que les étapes de calcul du volume de Q par la méthode M2 peuvent être résumées par la formule générale suivante :

$$\mathrm{Vol}(Q) = \frac{\left\lfloor \frac{d!\, H(2\, t\, \delta^{d+1}\, d!\,(d+1)! + \delta)}{(2\, t\, \delta^{d}\, d!\,(d+1)! + 1)^{d}} \right\rceil}{d!\, \delta^{d}}$$

  où δ est un multiple quelconque de la période de H et t un majorant quelconque du volume de Q.

- La méthode M2 peut être appliquée (de manière récursive) pour obtenir tous les coefficients de $H(n)$ lorsque n est un multiple de la période de H.
- La proposition 3, sur laquelle est basée la méthode M2, peut se généraliser aux cas des polynômes à plusieurs variables. Cette généralisation, sur laquelle nous continuons de travailler, peut avoir des applications intéressantes dans le calcul de la probabilité d'occurrence des évènements de vote dépendant d'un paramètre k, en plus du paramètre n qui représente le nombre de votants (dans beaucoup de problèmes considérés par Gehrlein et Lepelley (2017), k est une mesure de la cohérence mutuelle des préférences individuelles).

Conclusion

Dans ce papier, nous avons pu obtenir le premier résultat probabiliste sur la vulnérabilité (théorique) du vote par note à trois niveaux à la manipulation coalitionnelle. Bien que la valeur que nous avons trouvée confirme clairement le caractère « très » manipulable de ce mode de scrutin, il est important de préciser que ce résulat a été obtenu en supposant que les votants (non stratégiques) ne réagissent pas à la menace de manipulation et qu'il serait utile de le compléter par une analyse plus « réaliste » qui prend en compte ces réactions. Une autre piste de recherche qui pourrait conduire à une meilleure évaluation de la manipulabilité de EV, serait de calculer la fréquence des situation instables, sous cette règle, en fonction du degré d'homogénéité des préférences individuelles.

Bibliographie

Aleskerov F, Karabekyan D and Sanver R (2011), On the manipulability of voting rules: The case of 4 and 5 alternatives, *Mathematical Social Sciences*, 64, 67-73.

Beck M, De Loera J, Develin M, Pfeifle J and Stanley RP (2005), Coefficients and roots of Ehrhart polynomials, *Contemporary Mathematics*, 374, 15-36.

Chamberlin JR (1985), An investigation into the relative manipulability of four voting systems, *Behavioral Sciences*, 30, 195-203.

Ehrhart E (1962), Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254, 616-618.

El Ouafdi A, Lepelley D and Smaoui H (2017), On the Condorcet Efficiency of Evaluative Voting (and other Voting Rules) with Trichotomous Preferences, *working paper, CEMOI.*

El Ouafdi A, Lepelley D and Smaoui H (2019), Probabilities of electoral outcomes: from three-candidate to four-candidate elections, *Theory and Decision*, forthcoming.

Favardin P and Lepelley D (2006), Some further results on the manipulability of social choice's rules, *Social Choice and Welfare*, 26, 485-509.

Gehrlein WV and Lepelley D (2017), *Elections, voting rules and paradoxical outcomes*, Springer.

Gibbard A (1973), Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, 41, 587-601.

Kelly JS (1993), Almost all social choice rules are highly manipulable, but a few aren't, *Social Choice and Welfare*, 10, 161-175.

Kim KH and Roush FW (1996), Statistical manipulability of social choice functions, *Group Decision and Negotiation*, 5, 263-282.

Lepelley D and Mbih B (1987), The proportion of coalitionally unstable situations under the plurality rule, *Economics Letters*, 24, 311-315.

Lepelley D and Mbih B (1994), The Vulnerability of Four Social Choice Functions to Coalitional Manipulation of Preferences, *Social Choice and Welfare*, 11, 253-265.

Lepelley D and Valognes F (2003), Voting rules, manipulability and social homogeneity, *Public Choice*, 116, 165-184.

Nitzan S (1985), The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation, *Public Choice*, 47, 349-370.

Peleg B (1979), A note on manipulability of large voting schemes, *Theory and Decision*, 11, 401-412.

Pritchard G and Wilson M (2007), Exact results on manipulability of positional voting rules, *Social Choice and Welfare*, 29, 487-513.

Saari DG (1990), Susceptibility to manipulation, *Public Choice*, 64, 21-41.

Satterthwaite MA (1975), Strategy-proofness and Arrow's conditions, Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, *Journal of Economic Theory*, 10, 187-217.

Smaoui H and Lepelley D (2013), Le système de vote par note à trois niveaux : étude d'un nouveau mode de scrutin, *Revue d'Economie Politique*, 123, 827-850.

Software

[LattE] LattE integrale by De Loera J.A., Hemmecke R, Tauzer J, Yoshida R, and Köppe M, ver. 1.7.3 (2016), http://www.math.ucdavis.edu/~latte/

[Normaliz] Normaliz by Bruns W, Ichim B, and Söger C, ver. 3.6.2 (2018), http://www.math matik.uni-osnabrueck.de/normaliz/

[lrs] lrs by Avis D, ver. 6.2 (2016), http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/C/lrs.html.

Annexe

V_1^{BR} =12660788040788908665157908971366342943135363036624540848008081116655967222137/381367191440050344960811019479091799093521094736028034751075

V_2^{BR} =86418621505721509890668331861221837345654001241260411329753/3797890718354422133031694382790066087579198657488758226471451033600000000000000000

V_5^{BR} =12660788040788908665157908971366342943135363036624540848008081116655967222137/9859111016769732897176412945342584698897821779085219790210657307696279862235383528947712000000000000

V_6^{BR} =1238808125883667824886104916856789900835811755259754967984158937312143278202960277134443434785268696840435464451461/392314186005816497106685386304726157417949881993916768078995544013935065156009915675370414778246539228677878579200000000000000000000000000

V_8^{BR} =138641929409513316735263521708783910841893120060480481608967467048115252552839065900942732829070415790568970017947631518864360903/32619959406189865058051265869246732595094626029160314297869501468137807251715568399880593677342668095769375579879072249099059200000000000000000000000000

$\Pr(Manip, BR, \infty) =$
13444007886997125387535018798319139024757500267645178465320745695830002452159856780019406505745005269940510690508465763511 | 20569153016907733473175216946812885481165676307790096966650652897897419774370343275040787632440892702075125760000000000000000

$G(n) =$
22318592374586038669906804060942501152794178642367730233877648127272866451463134727184127476935366311576521476462633024932354059963123387345256882836150375905330024812879192805795643829147936740505510342453720026006589933872073819036739869679383100954250156977306913473749862647040625517972429247726791490420865170598410756095652324841748468943836884370718334746446385472907242830493142290967752502785308002687749240660096987398682533140914908899630507047741434251579456730679600751981055105993116425844625667304168185993934227578246495248483909991460636358815793473264583744772774982867818181520105605350258767978670668610051183489899154709406626336857390651627737688013879459546150839981833532287202104961873910752294145066710163410082165675525509140386552692346304593689217617286066086072673469518037241861746385903451706435230154134911065361695494757740810144111200905921136080948358215659645826400202911729560911966609398921453665513373696001