FACULTÉ DE DROIT ET D'ÉCONOMIE

Année universitaire 2015-2016

L2 ÉCONOMIE-GESTION

ÉPREUVE DE MICROÉCONOMIE 2

Durée : 1H00

Session 2 : juin 2016

Les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Équilibre général avec externalité (20 points)

On considère une économie comprenant un individu représentatif et deux biens (notés x et y). L'individu possède et offre sur le marché 10 unités de travail (input noté l) et 10 unités de capital (noté k). On note w et r les prix des inputs et p_x et p_y les prix des deux biens.

La fonction de production du bien x est égale à :

$$f_x(l,k) = l^{1/2}k^{1/2}$$

La fonction de production du bien y est égale à :

$$f_y(l,k) = \frac{10-x}{10}\min(l,k)$$

L'industrie du bien x exerce donc une externalité négative sur la production du bien y.

La fonction d'utilité de l'individu représentatif est égale à :

$$U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$$

Question 1 (12 points) : Calculer l'équilibre général de cette économie.

Question 2 (6 points) : Calculer l'optimum de Pareto.

Question 3 (2 points) : Comparer les résultats des deux questions précédentes et commenter.

2 Eléments de correction

2.1 Fonctions de demande de l'individu représentatif

Les fonctions de demande de l'individu i sont données par :

$$U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} Tms(x,y) = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = 10w + 10r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}}{\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = 10w + 10r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = 10(w+r) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_y y = p_x x \\ 2p_x x = 10(w+r) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_y y = 5(w+r) \\ p_x x = 5(w+r) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 5\frac{w+r}{p_y} \\ x = 5\frac{w+r}{p_x} \end{array} \right\}$$

2.2 Industrie du bien x

La fonction de production est à rendements d'échelle constants. Le nombre de firmes et la production par firme sont indéterminés. Le prix de vente du bien x doit être égal à son coût unitaire de production.

On calcule le coût unitaire de production de x :

$$\left\{ \begin{array}{c} Tmst(l,k) = \frac{w}{r} \\ f_x(l,k) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{2}l^{-1/2}k^{1/2}}{\frac{1}{2}l^{1/2}k^{-1/2}} = \frac{w}{r} \\ l^{1/2}k^{1/2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{k}{l} = \frac{w}{r} \\ l^{1/2}k^{1/2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{w}{r}l \\ l^{1/2}\left(\frac{w}{r}l\right)^{1/2} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{w}{r}l \\ \sqrt{\frac{w}{r}}l = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{w}{r}\sqrt{\frac{r}{w}} \\ l = \sqrt{\frac{r}{w}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \sqrt{\frac{w}{r}} \\ l = \sqrt{\frac{r}{w}} \end{array} \right\}$$

$$c_x(w,r,1) = w\sqrt{\frac{r}{w}} + r\sqrt{\frac{w}{r}} = \sqrt{wr} + \sqrt{wr} = 2\sqrt{wr}$$

$$p_x = c_x(w,r,1) = 2\sqrt{wr}$$

2.3 Industrie du bien y

La fonction de production est à rendements d'échelle constants. Le nombre de firmes et la production par firme sont indéterminés. Le prix de vente du bien y doit être égal à son coût unitaire de production.

On calcule le coût unitaire de production de y :

$$\left\{ \begin{array}{c} l = k \\ f_y(l,k) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} l = k \\ \frac{10-x}{10}\min(l,k) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} l = k \\ \min(l,k) = \frac{10}{10-x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{10}{10-x} \\ l = \frac{10}{10-x} \end{array} \right\}$$

$$c_y(w,r,1) = w\frac{10}{10-x} + r\frac{10}{10-x} = \frac{10}{10-x}(w+r)$$

$$p_y = c_y(w,r,1) = \frac{10}{10-x}(w+r)$$

2.4 Conditions d'équilibre

Sur le marché du bien x, on doit avoir :

$$\begin{aligned} x &= 5\frac{w+r}{p_x} \\ p_x &= 2\sqrt{wr} \end{aligned}$$

Sur le marché du bien, on doit avoir :

$$\begin{aligned} y &= 5\frac{w+r}{p_y} \\ p_y &= \frac{10}{10-x}(w+r) \end{aligned}$$

Sur le marché du travail, on doit avoir :

$$10 = x\sqrt{\frac{r}{w}} + y\frac{10}{10-x}$$

Sur le marché du capital, on doit avoir :

$$10 = x\sqrt{\frac{w}{r}} + y\frac{10}{10-x}$$

2.5 Equilibre

$$\left\{\begin{array}{c} x = 5\frac{w+r}{p_x} \\ y = 5\frac{w+r}{p_y} \\ p_x = 2\sqrt{wr} \\ p_y = \frac{10}{10-x}(w+r) \\ 10 = x\sqrt{\frac{r}{w}} + y\frac{10}{10-x} \\ 10 = x\sqrt{\frac{w}{r}} + y\frac{10}{10-x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5\frac{w+r}{p_x} \\ y = 5\frac{w+r}{p_y} \\ p_x = 2\sqrt{wr} \\ p_y = \frac{10}{10-x}(w+r) \\ 10 = x\sqrt{\frac{r}{w}} + y\frac{10}{10-x} \\ x\sqrt{\frac{r}{w}} + y\frac{10}{10-x} = x\sqrt{\frac{w}{r}} + y\frac{10}{10-x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5\frac{w+r}{p_x} \\ y = 5\frac{w+r}{p_y} \\ p_x = 2\sqrt{wr} \\ p_y = \frac{10}{10-x}(w+r) \\ 10 = x\sqrt{\frac{r}{w}} + y\frac{10}{10-x} \\ \sqrt{\frac{r}{w}} = \sqrt{\frac{w}{r}} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5\frac{2w}{p_x} \\ y = 5\frac{2w}{p_y} \\ p_x = 2w \\ p_y = \frac{10}{10-x}(2w) \\ 10 = x + y\frac{10}{10-x} \\ r = w \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5 \\ y = 10\frac{w}{p_y} \\ p_x = 2w \\ p_y = \frac{10}{10-5}(2w) \\ 10 = 5 + y\frac{10}{10-5} \\ r = w \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5 \\ y = 10\frac{w}{4w} \\ p_x = 2w \\ p_y = 4w \\ 5 = 2y \\ r = w \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5 \\ y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ p_x = 2w \\ p_y = 4w \\ y = \frac{5}{2} \\ r = w \end{array}\right\}$$

2.6 Optimum de Pareto

$$
\begin{aligned}
& \max x^{1/2} y^{1/2} \\
s/c \quad x &= l_x^{1/2} k_x^{1/2} \\
y &= \frac{10-x}{10} \min\left(10-l_x, 10-k_x\right)
\end{aligned}
$$

A l'optimum, on a $10 - l_x = 10 - k_x$. Ce qui implique $l_x = k_x$.

Le programme de maximisation se réécrit :

$$
\max \left(l_x^{1/2} k_x^{1/2}\right)^{1/2} \left[\frac{10 - l_x^{1/2} k_x^{1/2}}{10} \min\left(10-l_x, 10-k_x\right)\right]^{1/2}
$$

En utilisant $l_x = k_x$, il vient :

$$
\max \left(l_x\right)^{1/2} \left[\frac{10-l_x}{10} \left(10-l_x\right)\right]^{1/2} = \max \frac{1}{\sqrt{10}} \left(l_x\right)^{1/2} \left(10-l_x\right)
$$

On dérive par rapport à l_x et on égalise à 0 :

$$
\frac{1}{\sqrt{10}} \left[\frac{1}{2} \left(l_x\right)^{-1/2} \left(10-l_x\right) + \left(l_x\right)^{1/2} (-1)\right] = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(l_x\right)^{-1/2} \left(10-l_x\right) = \left(l_x\right)^{1/2} \Leftrightarrow 10 - l_x = 2l_x \Leftrightarrow 10 = 3l_x \Leftrightarrow l_x = \frac{10}{3}
$$

Pour avoir un optimum de Pareto, on doit avoir :

$$
\begin{aligned}
l_x &= k_x = \frac{10}{3} \\
x &= \left(\frac{10}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{10}{3}\right)^{1/2} = \frac{10}{3} \\
y &= \frac{10 - \frac{10}{3}}{10} \min\left(10 - \frac{10}{3}, 10 - \frac{10}{3}\right) = \frac{\frac{20}{3}}{10} \frac{20}{3} = \frac{40}{9}
\end{aligned}
$$