L2 Économie-Gestion - micro-économie 2 - Examen 2

18 avril 2017 (Durée 2 heures)

Les calculatrices sont autorisées uniquement si elles sont **non** programmables. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**. Le barême indiqué est non contractuel.

1 Équilibre général (12 points)

Soit une économie avec deux biens de consommation (notés C_1 et C_2) et un unique facteur de production, le travail (h). Il y a deux agents travailleurs-consommateurs (notés A et B) et deux entreprises (chacune étant spécialisée dans la production de l'un des biens). L'offre de travail de chacun des deux agents est exogène et égale à 10 heures. Les fonctions d'utilité respectives des deux agents sont : $U_A(C_1, C_2) = C_1 C_2$ et $U_B(C_1, C_2) = C_1^{1/3} C_2^{2/3}$. L'agent 1 est propriétaire de l'entreprise produisant le bien 1 et l'agent 2 est propriétaire de celle produisant le bien 2. La fonction de production de l'entreprise produisant le bien 1 est $F_1(h_1) = \sqrt{h_1}$. La fonction de production de l'entreprise produisant le bien 2 est $F_2(h_2) = 4\sqrt{h_2}$. On note p_1 le prix du bien 1, p_2 le prix du bien 2 et w le taux de salaire.

Question 1 (2,5 points) : Déterminer les fonctions de demande de biens des deux agents.

Question 2 (2,5 points) : Déterminer la fonction d'offre de chacune des deux entreprises, sa fonction de demande de travail et sa fonction de profit.

Question 3 (3 points) : On normalise $w = 1$. Déterminer les valeurs d'équilibre des prix des deux biens.

Question 4 (1 point) : Calculer les quantités consommées par chacun des individus, ainsi que les quantités de travail utilisées par chacune des firmes.

Question 5 (2 points) : Déterminer l'équation de la frontière de production de cette économie.

Question 6 (1 point) : Rappeler les conditions à respecter pour avoir un optimum de Pareto. Vérifier que l'équilibre trouvé respecte ces conditions.

2 Pollution (13 points)

Une entreprise produit un bien y à partir de deux inputs x_1 et x_2 avec la fonction de production $y = 3x_1^{1/3} x_2^{1/3}$. Les prix respectifs des inputs sont $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$. L'output obtenu est vendu sur un marché concurrentiel au prix unitaire $p = 10$.

Le vent pousse la fumée produite par l'entreprise vers une maison voisine. Le propriétaire subit une désutilité liée à la fumée ayant un équivalent monétaire égal à $5x_1$.

Question 7 (2,5 points) : Quels sont les choix (quantités d'inputs et d'output) de l'entreprise si elle ne prend pas en compte les nuisances infligées au propriétaire de la maison voisine ?

Question 8 (2,5 points) : Déterminer les quantités d'inputs et d'output socialement optimales.

Question 9 (2 points) : L'État décide d'introduire une taxe unitaire τ sur l'utilisation de l'input 1. Quelle est la valeur optimale de τ ?

Question 10 (2 points) : L'État renonce à taxer l'input 1 et introduit une taxe unitaire t sur la production de l'entreprise. Quelle est la valeur optimale de t ?

Question 11 (4 points) : Comparer les modes de taxation des questions 9 et 10 et commenter.

3 Éléments de correction

3.1 Équilibre général (12 points)

Question 1 (2,5 points) : Ce sont des fonctions Cobb-Douglas, on a donc (voir TD1) :

$$C_1^A = \frac{1}{2}\frac{10w+\pi_1}{p_1} \; ; \; C_2^A = \frac{1}{2}\frac{10w+\pi_1}{p_2} \; ; \; C_1^B = \frac{1}{3}\frac{10w+\pi_2}{p_1} \; ; \; C_2^B = \frac{2}{3}\frac{10w+\pi_2}{p_2}$$

Question 2 (2,5 points) : Comportement de la firme 1 :

$$\pi_1 = p_1 C_1 - wh_1 = p_1\sqrt{h_1} - wh_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial h_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{p_1}{2\sqrt{h_1}} - w = 0 \Leftrightarrow \frac{p_1}{2\sqrt{h_1}} = w \Leftrightarrow \sqrt{h_1} = \frac{p_1}{2w} \Leftrightarrow h_1 = \frac{p_1^2}{4w^2}$$

Comportement de la firme 2 :

$$\pi_2 = p_2 C_2 - wh_2 = p_2 4\sqrt{h_2} - wh_2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial h_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4p_2}{2\sqrt{h_2}} - w = 0 \Leftrightarrow 2\frac{p_2}{\sqrt{h_2}} = w \Leftrightarrow \sqrt{h_2} = 2\frac{p_2}{w} \Leftrightarrow h_2 = 4\frac{p_2^2}{w^2} \Leftrightarrow 4\sqrt{h_2} = 8\frac{p_2}{w}$$

Profits des firmes :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= p_1 C_1 - wh_1 = p_1\frac{p_1}{2w} - w\frac{p_1^2}{4w^2} = \frac{p_1^2}{2w} - \frac{p_1^2}{4w} = \frac{p_1^2}{4w} \\
\pi_2 &= p_2 C_2 - wh_2 = p_2 8\frac{p_2}{w} - w4\frac{p_2^2}{w^2} = 8\frac{p_2^2}{w} - 4\frac{p_2^2}{w} = 4\frac{p_2^2}{w}
\end{aligned}$$

Question 3 (3 points) : On égalise l'offre et la demande sur chacun des trois marchés :

$$\begin{aligned}
h_1 + h_2 &= 20 \Leftrightarrow \frac{p_1^2}{4w^2} + 4\frac{p_2^2}{w^2} = 20 && \text{marché du travail} \\
C_1^A + C_1^B &= C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{10w+\pi_1}{p_1} + \frac{1}{3}\frac{10w+\pi_2}{p_1} = \frac{p_1}{2w} && \text{marché du bien 1} \\
C_2^A + C_2^B &= C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{10w+\pi_1}{p_2} + \frac{2}{3}\frac{10w+\pi_2}{p_2} = 8\frac{p_2}{w} && \text{marché du bien 2}
\end{aligned}$$

On normalise le salaire $w = 1$. On multiplie la deuxième équation par p_1 et la troisième par p_2. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c}
\frac{1}{4}p_1^2 + 4p_2^2 = 20 \\
\frac{1}{2}(10+\pi_1) + \frac{1}{3}(10+\pi_2) = \frac{1}{2}p_1^2 \\
\frac{1}{2}(10+\pi_1) + \frac{2}{3}(10+\pi_2) = 8p_2^2
\end{array} \right\}$$

On remplace π_1 et π_2 par leurs valeurs. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{c}
\frac{1}{4}p_1^2 + 4p_2^2 = 20 \\
\frac{1}{2}\left(10+\frac{p_1^2}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(10+4p_2^2\right) = \frac{1}{2}p_1^2 \\
\frac{1}{2}\left(10+\frac{p_1^2}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(10+4p_2^2\right) = 8p_2^2
\end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c}
\frac{1}{4}p_1^2 + 4p_2^2 = 20 \\
3\left(10+\frac{p_1^2}{4}\right) + 2\left(10+4p_2^2\right) = 3p_1^2 \\
3\left(10+\frac{p_1^2}{4}\right) + 4\left(10+4p_2^2\right) = 48p_2^2
\end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4p_2^2 = 20 - \frac{1}{4}p_1^2 \\ 50 + \frac{3}{4}p_1^2 + 8p_2^2 = 3p_1^2 \\ 70 + \frac{3}{4}p_1^2 + 16p_2^2 = 48p_2^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8p_2^2 = 40 - \frac{1}{2}p_1^2 \\ 50 + \frac{3}{4}p_1^2 + 40 - \frac{1}{2}p_1^2 = 3p_1^2 \\ 70 + \frac{3}{4}p_1^2 = 32p_2^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8p_2^2 = 40 - \frac{1}{2}p_1^2 \\ 90 = \left(3 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) p_1^2 \\ 70 + \frac{3}{4}p_1^2 = 32p_2^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8p_2^2 = 40 - \frac{1}{2}p_1^2 \\ 90 = \frac{11}{4}p_1^2 \\ 70 + \frac{3}{4}p_1^2 = 32p_2^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8p_2^2 = 40 - \frac{1}{2}\frac{360}{11} \\ p_1^2 = \frac{360}{11} \\ 70 + \frac{3}{4}\frac{360}{11} = 32p_2^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8p_2^2 = \frac{440}{11} - \frac{180}{11} \\ p_1 = 6\sqrt{\frac{10}{11}} \\ \frac{770}{11} + \frac{270}{11} = 32p_2^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_2^2 = \frac{260}{11\times 8} \\ p_1 = 6\sqrt{\frac{10}{11}} \\ p_2^2 = \frac{1040}{11\times 32} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_2^2 = \frac{65}{22} \\ p_1 = 6\sqrt{\frac{10}{11}} \\ p_2 = \sqrt{\frac{65}{22}} \end{array} \right\}$$

On obtient :

$$w = 1 \ ; \ p_1 = 6\sqrt{\frac{10}{11}} \simeq 5,72 \ ; \ p_2 = \sqrt{\frac{65}{22}} \simeq 1,72$$

Question 4 (1 point) :

$$\begin{array}{ll} C_1^A = \frac{1}{2}\frac{10w+\pi_1}{p_1} = \frac{1}{2}\frac{10+\frac{36\times\frac{10}{11}}{4}}{6\sqrt{\frac{10}{11}}} \simeq 1,589 & C_2^A = \frac{1}{2}\frac{10w+\pi_1}{p_2} = \frac{1}{2}\frac{10+\frac{36\times\frac{10}{11}}{4}}{\sqrt{\frac{65}{22}}} \simeq 5,289 \\ C_1^B = \frac{1}{3}\frac{10w+\pi_2}{p_1} = \frac{1}{3}\frac{10+4\times\frac{65}{22}}{6\sqrt{\frac{10}{11}}} \simeq 1,271 & C_2^B = \frac{2}{3}\frac{10w+\pi_2}{p_2} = \frac{2}{3}\frac{10+4\times\frac{65}{22}}{\sqrt{\frac{65}{22}}} \simeq 8,462 \\ h_1 = \frac{p_1^2}{4w^2} = \frac{36}{4}\times\frac{10}{11} \simeq 8,182 & h_2 = 4\frac{p_2^2}{w^2} = 4\times\frac{65}{22} \simeq 11,818 \end{array}$$

Question 5 (2 points) : Équation de la frontière de production :

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1(h_1) = \sqrt{h_1} \\ F_2(h_2) = 4\sqrt{h_2} \\ h_1 + h_2 = 20 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 = \sqrt{h_1} \\ \frac{1}{4}C_2 = \sqrt{h_2} \\ h_1 + h_2 = 20 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1^2 = h_1 \\ \frac{1}{16}C_2^2 = h_2 \\ h_1 + h_2 = 20 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow C_1^2 + \frac{1}{16}C_2^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{16}C_2^2 = 20 - C_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}C_2 = \sqrt{20 - C_1^2} \Leftrightarrow C_2 = 4\sqrt{20 - C_1^2}$$

Question 6 (1 point) : Conditions à respecter pour avoir un optimum de Pareto :

$$Tms_A = Tms_B = Tmt$$

Application numérique :

$$Tms_A = \frac{C_2^A}{C_1^A} = \frac{\frac{1}{2}\frac{10+\frac{36\times\frac{10}{11}}{4}}{\sqrt{\frac{65}{22}}}}{\frac{1}{2}\frac{10+\frac{36\times\frac{10}{11}}{4}}{6\sqrt{\frac{10}{11}}}} = \frac{6\sqrt{\frac{10}{11}}}{\sqrt{\frac{65}{22}}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{\frac{65}{2}}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{13}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{13}} \simeq 3,328$$

$$Tms_B = \frac{C_2^B}{2C_1^B} = \frac{\frac{2}{3}\frac{10+4\times\frac{65}{22}}{\sqrt{\frac{65}{22}}}}{2\frac{1}{3}\frac{10+4\times\frac{65}{22}}{6\sqrt{\frac{10}{11}}}} = \frac{6\sqrt{\frac{10}{11}}}{\sqrt{\frac{65}{22}}}$$

$$Tmt = \frac{\partial 4\sqrt{20 - C_1^2}}{\partial C_1} = 4\frac{1}{2}\frac{-2C_1}{\sqrt{20 - C_1^2}} = -\frac{4\sqrt{\frac{36}{4}\times\frac{10}{11}}}{\sqrt{20 - \frac{36}{4}\times\frac{10}{11}}} = -\frac{4\frac{6}{2}\sqrt{\frac{10}{11}}}{\sqrt{\frac{880}{44} - \frac{360}{44}}} = -\frac{2\times 6\sqrt{\frac{10}{11}}}{\sqrt{\frac{260}{22}}} = -\frac{6\sqrt{\frac{10}{11}}}{\sqrt{\frac{65}{22}}}$$

3.2 Pollution (13 points)

Question 7 (2,5 points) : La firme cherche à maximiser son profit :

$$\pi = py - w_1x_1 - w_2x_2 = 3px_1^{1/3}x_2^{1/3} - w_1x_1 - w_2x_2$$

Conditions d'ordre 1 de la maximisation du profit :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial\pi()}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial\pi()}{\partial x_2} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} px_1^{-2/3}x_2^{1/3} - w_1 = 0 \\ px_1^{1/3}x_2^{-2/3} - w_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} px_1^{-2/3}x_2^{1/3} = w_1 \\ px_1^{1/3}x_2^{-2/3} = w_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2^{1/3} = \frac{w_1}{p}x_1^{2/3} \\ px_1^{1/3} = w_2x_2^{2/3} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2 = \left(\frac{w_1}{p}\right)^3 x_1^2 \\ px_1^{1/3} = w_2\frac{w_1^2}{p^2}x_1^{4/3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2 = \left(\frac{w_1}{p}\right)^3\left(\frac{p^3}{w_1^2w_2}\right)^2 \\ \frac{p^3}{w_1^2w_2} = x_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2 = \frac{w_1^3}{p^3}\frac{p^6}{w_1^4w_2^2} \\ \frac{p^3}{w_1^2w_2} = x_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2 = \frac{p^3}{w_1w_2^2} \\ x_1 = \frac{p^3}{w_1^2w_2} \end{array}\right\}$$

On a trouvé les quantités d'inputs utilisées. On remplace dans la fonction de production pour obtenir la production de la firme :

$$y = 3x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 3\left(\frac{p^3}{w_1^2w_2}\right)^{1/3}\left(\frac{p^3}{w_1w_2^2}\right)^{1/3} = 3\frac{p}{w_1^{2/3}w_2^{1/3}}\frac{p}{w_1^{1/3}w_2^{2/3}} = 3\frac{p^2}{w_1w_2}$$

Application numérique :

$$x_1 = \frac{p^3}{w_1^2w_2} = \frac{10^3}{1^2\times 2} = 500 \quad ; \quad x_2 = \frac{p^3}{w_1w_2^2} = \frac{10^3}{1\times 2^2} = 250 \quad ; \quad y = 3\frac{p^2}{w_1w_2} = 3\frac{10^2}{1\times 2} = 150$$

Question 8 (2,5 points) : On cherche à maximiser le surplus social :

$$W = \pi - 5x_1 = 3px_1^{1/3}x_2^{1/3} - w_1x_1 - w_2x_2 - 5x_1 = 3px_1^{1/3}x_2^{1/3} - (w_1+5)\,x_1 - w_2x_2$$

La fonction à maximiser a la même forme que dans la question précédente. On peut donc reprendre les solutions précédentes en remplaçant w_1 par w_1+5. On obtient :

$$x_1 = \frac{p^3}{(w_1+5)^2\,w_2} \quad ; \quad x_2 = \frac{p^3}{(w_1+5)\,w_2^2} \quad ; \quad y = 3\frac{p^2}{(w_1+5)\,w_2}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p^3}{(w_1+5)^2\,w_2} = \frac{1000}{(1+5)^2\times 2} \simeq 13,89 \quad ; \quad x_2 = \frac{p^3}{(w_1+5)\,w_2^2} = \frac{1000}{6\times 2^2} \simeq 41,67 \\ y &= 3\frac{p^2}{(w_1+5)\,w_2} = 3\frac{100}{6\times 2} = 25 \end{aligned}$$

Question 9 (2 points) : La firme cherche à maximiser son profit :

$$\pi = py - w_1x_1 - w_2x_2 - \tau x_1 = 3px_1^{1/3}x_2^{1/3} - (w_1+\tau)\,x_1 - w_2x_2$$

La firme choisit :

$$x_1 = \frac{p^3}{(w_1+\tau)^2 w_2} \quad ; \quad x_2 = \frac{p^3}{(w_1+\tau) w_2^2} \quad ; \quad y = 3\frac{p^2}{(w_1+\tau) w_2}$$

L'État choisit $\tau = 5$. Les choix de la firme correspondent alors exactement à l'optimum social.

Question 10 (2 points) : On commence par déterminer le comportement de la firme en fonction de la valeur de t. La firme cherche à maximiser son profit :

$$\pi = py - w_1 x_1 - w_2 x_2 - ty = (p-t)\, 3x_1^{1/3} x_2^{1/3} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

La firme choisit :

$$x_1 = \frac{(p-t)^3}{w_1^2 w_2} \quad ; \quad x_2 = \frac{(p-t)^3}{w_1 w_2^2} \quad ; \quad y = 3\frac{(p-t)^2}{w_1 w_2}$$

Remarque : si $t \geq 10$, la firme choisit $x_1 = x_2 = y = 0$.

On peut maintenant écrire le surplus social en fonction de t :

$$\begin{aligned} W &= \pi - 5x_1 + ty = py - ty + ty - w_1 x_1(t) - w_2 x_2(t) - 5x_1(t) = py - (w_1+5)\, x_1(t) - w_2 x_2(t) \\ &= 3p\frac{(p-t)^2}{w_1 w_2} - (w_1+5)\frac{(p-t)^3}{w_1^2 w_2} - w_2 \frac{(p-t)^3}{w_1 w_2^2} = 3p\frac{(p-t)^2}{w_1 w_2} - (w_1+5)\frac{(p-t)^3}{w_1^2 w_2} - \frac{(p-t)^3}{w_1 w_2} \\ &= \left[3p - \left(\frac{w_1+5}{w_1}\right)(p-t) - (p-t)\right]\frac{(p-t)^2}{w_1 w_2} = \left[3p - \frac{2w_1+5}{w_1}(p-t)\right]\frac{(p-t)^2}{w_1 w_2} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$W = [30 - 7(10-t)]\frac{(10-t)^2}{2} = (7t-40)\frac{(10-t)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= 7\frac{(10-t)^2}{2} + (7t-40)\frac{2(10-t)(-1)}{2} = \left[\frac{7}{2}(10-t) - (7t-40)\right](10-t) \\ &= \left(35 - \frac{7}{2}t - 7t + 40\right)(10-t) = \left(75 - \frac{21}{2}t\right)(10-t) \end{aligned}$$

Si $t < \frac{75\times 2}{21} = \frac{50}{7} \simeq 7,14$, $\frac{dW}{dt} > 0$. Si $t > \frac{50}{7}$, $\frac{dW}{dt} < 0$. Pour maximiser le surplus social, l'État doit choisir $t = \frac{50}{7} \simeq 7,14$.

Question 11 (4 points) : La taxe sur l'input 1 (utilisée à la question 3) permet d'implémenter l'optimum social. En revanche, la taxe sur la production (utilisée à la question 4) ne permet pas d'atteindre l'optimum social. En effet, avec $t = \frac{50}{7}$, la firme choisit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(p-t)^3}{w_1^2 w_2} = \frac{\left(10 - \frac{50}{7}\right)^3}{2} = \frac{\left(\frac{20}{7}\right)^3}{2} = \frac{8000}{686} \simeq 11,66 \\ x_2 &= \frac{(p-t)^3}{w_1 w_2^2} = \frac{\left(\frac{20}{7}\right)^3}{4} = \frac{8000}{1372} \simeq 5,83 \\ y &= 3\frac{(p-t)^2}{w_1 w_2} = 3\frac{\left(\frac{20}{7}\right)^2}{2} = \frac{1200}{98} \simeq 12,24 \end{aligned}$$

Taxer directement l'input 1 permet de modifier le processus de production de la firme en l'incitant à substituer l'input 2 à l'input 1. Cette taxe permet de réduire la pollution pour chacune des unités produites. En revanche, la taxe sur la production ne modifie pas le processus de production et donc la pollution pour un niveau de production donné ne change pas. Pour un même niveau de production, la pollution est plus élevée avec une taxe sur la production qu'avec une taxe ciblant l'utilisation de l'input 1. Lorsqu'il est contraint de taxer la production, l'Etat choisit donc d'inciter la firme à réduire sa production en deça de la production correspondant à l'optimum de premier rang. La taxe sur la production ne permet d'atteindre qu'un optimum de second rang.