L2 Economie - micro-économie 2 - Examen 2

16 avril 2012 (Durée 2 heures)

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, les téléphones portables sont strictement interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Equilibre général (15 points)

On s'intéresse à l'équilibre général d'un pays. Ce pays a 100 habitants. 60 habitants sont des travailleurs, qui ne possèdent pas de capital mais offrent sur le marché du travail 1 unité de travail (l) chacun (cette quantité est fixée de façon exogène pour simplifier le modèle). Les 40 autres habitants sont des capitalistes-rentiers, qui ne travaillent pas mais disposent chacun d'1 unité de capital (k).

Deux biens, notés y_1 et y_2, peuvent être produits. Les fonctions de production des deux biens sont respectivement égales à : $y_1 = f_1(l_1, k_1) = l_1^{2/3} k_1^{1/3}$ et $y_2 = f_2(l_2, k_2) = l_2^{1/3} k_2^{2/3}$.

Tous les habitants ont la même fonction d'utilité : $U(y_1, y_2) = \sqrt{y_1 y_2}$.

On note : w le prix unitaire du travail, r le prix unitaire du capital, p_1 le prix unitaire du bien y_1 et p_2 le prix unitaire du bien y_2 (**les étudiants ne sont pas autorisés à modifier les notations**).

Question 1 (3 points) : Calculer les fonctions de demande conditionnelles de facteurs d'une firme produisant le bien 1 et celles d'une firme produisant le bien 2.

Question 2 (2 points) : Calculer les fonctions de demande pour les deux biens des travailleurs et des capitalistes.

Question 3 (1 point) : Combien d'entreprises sont créées dans chacun des deux secteurs d'activité.

Question 4 (1 point) : Exprimer les prix d'équilibre des biens 1 et 2 en fonction des prix d'équilibre des deux inputs.

Question 5 (1 point) : En déduire que $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3}$.

Question 6 (1 point) : Déterminer les conditions d'équilibre sur les marchés des deux biens. En déduire que : $y_2 = \frac{p_1}{p_2} y_1$.

Question 7 (1 point) : Déterminer les conditions d'équilibre sur les marchés des deux inputs.

Question 8 (3 points) : Utiliser les conditions d'équilibre sur les marchés des deux inputs et $y_2 = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} y_1$ pour exprimer r en fonction de w.

Question 9 (1 point) : On pose $w = 2$. Calculer les valeurs de r, p_1 et p_2.

Question 10 (1 point) : Calculer les quantités totales produites de chacun des biens et les quantités consommées par chacun des habitants.

2 Responsabilité en cas d'accident (7 points)

Le modèle comprend un automobiliste et un cycliste. Le cycliste peut être renversé par l'automobiliste. L'automobiliste choisit un niveau de prudence x. La probabilité d'accident est égale à $p(x) = \frac{1}{1+x}$. La prudence génère un coût $c(x) = x$ pour l'automobiliste. En cas d'accident, le cycliste subit un dommage $h > 1$. On va supposer que h peut être "réparé" en versant une somme d'argent. On suppose que les deux individus sont neutres au risque.

Question 1 (1 point) : Déterminer la valeur de x qui est socialement optimale.

Question 2 (1 point) : Déterminer le choix de x par l'automobiliste en l'absence de responsabilité. Est-ce socialement optimal ?

Question 3 (2,5 points) : (a) Montrer que la règle de responsabilité stricte incite l'automobiliste à se comporter de façon socialement optimale. (b) Cette règle conduirait-elle encore à l'optimum social si la probabilité d'accident dépendait aussi du comportement du cycliste ? (c) Cette règle conduirait-elle encore à l'optimum social si la probabilité d'accident dépendait aussi du niveau d'activité de l'automobiliste ?

Question 4 (2,5 points) : (a) Montrer que la règle de responsabilité pour faute incite l'automobiliste à se comporter de façon socialement optimale si la norme de prudence est bien, choisie. (b) Cette règle conduirait-elle encore à l'optimum social si la probabilité d'accident dépendait aussi du comportement du cycliste ? (c) Cette règle conduirait-elle encore à l'optimum social si la probabilité d'accident dépendait aussi du niveau d'activité de l'automobiliste ?

3 Correction

3.1 Exercice 1 (15 points)

Question 1 (points) : Calculer les fonctions de demande conditionnelles de facteurs d'une firme produisant le bien 1.

$$Tmst\,(l_1, k_1) = \frac{w}{r} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}l_1^{-1/3}k_1^{1/3}}{\frac{1}{3}l_1^{2/3}k_1^{-2/3}} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow \frac{2k_1}{l_1} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow l_1 = \frac{2r}{w}k_1$$

On substitue dans la fonction de production :

$$y_1 = l_1^{2/3}k_1^{1/3} \Leftrightarrow y_1 = \left(\frac{2r}{w}k_1\right)^{2/3} k_1^{1/3} \Leftrightarrow y_1 = \left(\frac{2r}{w}\right)^{2/3} k_1 \Leftrightarrow k_1 = \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} y_1$$

$$l_1 = \frac{2r}{w}k_1 \Leftrightarrow l_1 = \frac{2r}{w}\left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} y_1 \Leftrightarrow l_1 = \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} y_1$$

On a de même :

$$Tmst\,(l_2, k_2) = \frac{w}{r} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}l_2^{-2/3}k_2^{2/3}}{\frac{2}{3}l_2^{1/3}k_2^{-1/3}} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow \frac{k_2}{2l_2} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow l_2 = \frac{r}{2w}k_2$$

$$y_2 = l_2^{1/3}k_2^{2/3} \Leftrightarrow y_2 = \left(\frac{r}{2w}k_2\right)^{1/3} k_2^{2/3} \Leftrightarrow y_2 = \left(\frac{r}{2w}\right)^{1/3} k_2 \Leftrightarrow k_2 = \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} y_2$$

$$l_2 = \frac{r}{2w}k_2 \Leftrightarrow l_2 = \frac{r}{2w}\left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} y_2 \Leftrightarrow l_2 = \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} y_2$$

Question 2 (points) : Calculer les fonctions de demande pour les deux biens des travailleurs et des capitalistes.

$$Tms\,(y_1, y_2) = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}y_1^{-1/2}y_2^{1/2}}{\frac{1}{2}y_1^{1/2}y_2^{-1/2}} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow p_2y_2 = p_1y_1$$

On reporte dans la contrainte budgétaire :

$$p_1y_1 + p_2y_2 = R \Leftrightarrow 2p_1y_1 = R \Leftrightarrow y_1 = \frac{R}{2p_1}$$

$$p_2y_2 = p_1y_1 \Leftrightarrow p_2y_2 = p_1\frac{R}{2p_1} \Leftrightarrow y_2 = \frac{R}{2p_2}$$

Pour les travailleurs, $R = w$. Pour les capitalistes, $R = r$.

Question 3 (points) : Ce nombre est indéterminé car les rendements d'échelle sont constants.

Question 4 (points) : Comme les rendements d'échelle sont constants, le prix du bien doit être égal à son coût unitaire :

$$\begin{aligned} p_1 &= wl_1(w,r,1) + rk_1(w,r,1) = w\left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} + r\left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} = w^{2/3}(2r)^{1/3} + r^{1/3}\left(\frac{w}{2}\right)^{2/3} \\ &= \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] w^{2/3} r^{1/3} \end{aligned}$$

Comme les rendements d'échelle sont constants, le prix du bien doit être égal à son coût unitaire :

$$\begin{aligned} p_2 &= wl_2(w,r,1) + rk_2(w,r,1) = w\left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} + r\left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} = w^{1/3}\left(\frac{r}{2}\right)^{2/3} + r^{2/3}(2w)^{1/3} \\ &= \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] w^{1/3} r^{2/3} \end{aligned}$$

Question 5 (points) :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] w^{2/3} r^{1/3}}{\left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] w^{1/3} r^{2/3}} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3}$$

Question 6 (points) :

Marché du bien 1 :

$$60 \times \frac{w}{2p_1} + 40 \times \frac{r}{2p_1} = y_1 \Leftrightarrow \frac{60w + 40r}{2p_1} = y_1$$

Marché du bien 2 :

$$60 \times \frac{w}{2p_2} + 40 \times \frac{r}{2p_2} = y_2 \Leftrightarrow \frac{60w + 40r}{2p_2} = y_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{60w+40r}{2p_1} = y_1 \\ \frac{60w+40r}{2p_2} = y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 60w + 40r = 2p_2y_2 = 2p_1y_1 \Leftrightarrow 30w + 20r = p_2y_2 = p_1y_1$$

$$p_2y_2 = p_1y_1 \Leftrightarrow y_2 = \frac{p_1}{p_2}y_1 \Leftrightarrow y_2 = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} y_1$$

Question 7 (points) : Déterminer les conditions d'équilibre sur les marchés des deux inputs.

Marché du travail :

$$60 = \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} y_1 + \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} y_2$$

Marché du capital :

$$40 = \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} y_1 + \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} y_2$$

Question 8 (points) :

$$\left\{\begin{array}{c} 60 = \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} y_1 + \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} y_2 \\ 40 = \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} y_1 + \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} y_2 \\ y_2 = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 60 = \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} y_1 + \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} y_1 \\ 40 = \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} y_1 + \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} y_1 \\ y_2 = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} y_1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 60 = \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} y_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} y_1 \\ 40 = \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} y_1 + 2^{1/3} \left(\frac{w}{r}\right)^{2/3} y_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 60 = \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} y_1 \\ 40 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} + 2^{1/3}\right] \left(\frac{w}{r}\right)^{2/3} y_1 \end{array}\right\}$$

On divise membre à membre la première équation par la seconde :

$$\left\{\begin{array}{c} 60 = \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} y_1 \\ 40 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} + 2^{1/3}\right] \left(\frac{w}{r}\right)^{2/3} y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{60}{40} = \frac{\left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} y_1}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} + 2^{1/3}\right] \left(\frac{w}{r}\right)^{2/3} y_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{\left(\frac{r}{w}\right)^{1/3}}{\left(\frac{w}{r}\right)^{2/3}} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} \times \left(\frac{r}{w}\right)^{2/3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{r}{w} \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}w$$

Question 9 (points) : On pose $w = 2$. Calculer les valeurs de r, p_1 et p_2.

$$\begin{array}{rcl} r &=& 3 \\ p_1 &=& \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] w^{2/3} r^{1/3} = \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] 2^{2/3} 3^{1/3} = \left[2^{1/3} 2^{2/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} 2^{2/3}\right] 3^{1/3} \\ &=& [2+1]\, 3^{1/3} = 3^{4/3} \simeq 4,3267 \\ p_2 &=& \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] w^{1/3} r^{2/3} = \left[2^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] 2^{1/3} 3^{2/3} = \left[2^{2/3} + \frac{1}{2^{1/3}}\right] \times 3^{2/3} \\ &\simeq& (1,5874 + 0,7937) \times 2,0801 \simeq 4,9529 \end{array}$$

Petit test de vérification, on doit avoir :

$$\begin{array}{rcl} \frac{p_1}{p_2} &=& \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} \\ \frac{p_1}{p_2} &\simeq& \frac{4,3267}{4,9529} \simeq \frac{4.3267}{4.9529} \simeq 0,8736 \\ \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} &=& \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \simeq 0,8736 \end{array}$$

3.2 Responsabilité en cas d'accident (7 points)

Questions 1 à 4 : Voir TD5.