L2 Économie-Gestion - Microéconomie 2
Examen 1 (Durée : 2 heures)

3 avril 2018

Les calculatrices **non programmables** sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Économie sans production (8 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales de l'individu A sont $\left(\omega_x^A = 4, \omega_y^A = 2\right)$ et celles de l'individu B sont $\left(\omega_x^B = 16, \omega_y^B = 8\right)$. Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A\left(x_A, y_A\right) = \sqrt{x_A} + y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B\left(x_B, y_B\right) = \sqrt{x_B} + \sqrt{y_B}$. Cette économie est dirigée par Jean-Luc, un planificateur bienveillant et omnipotent. Il vous a choisi comme conseiller.

Question 1 (4 points) : Quelle allocation conseillez-vous de mettre en place ? Bien justifier votre choix.

Question 2 (4 points) : Comment conseillez-vous de procéder pour l'atteindre ?

2 Économie onirique (6 points)

Aurélien s'ennuie sur les bancs de son université et il a tendance à s'endormir et à rêver. Lors d'un rêve, il devient Orelsinge. Il rêve qu'il dispose de 20 pommes (bien x). Il rencontre Sun Wukong, qui lui dispose de 10 pêches (bien y). La fonction d'utilité d'Orelsinge est $U_A\left(x_A, y_A\right) = 2x_Ay_A$ tandis que celle de Sun Wukong est $U_B\left(x_B, y_B\right) = x_By_B^2$.

Question 3 (6 points) : Déterminez le cœur de cette économie.

3 Économie avec production (6 points)

Robinson Crusoë est seul sur son île. Chaque jour, il dispose de 16 heures (hors sommeil) à répartir entre le travail et le loisir. Le travail permet de trouver de la nourriture dans l'intérieur de l'île. La fonction de production est : $F(h) = 2h$ où h est le nombre d'heures travaillées. La fonction d'utilité de Robinson est $U(C, L) = CL$, où C est la quantité de nourriture consommée et L le nombre d'heures de loisir que Robinson s'est octroyé. On note p le prix unitaire de la nourriture et w le taux de salaire horaire.

Question 4 (2 points) : Déterminer la fonction de demande de nourriture et la fonction d'offre de travail de Robinson-consommateur.

Question 5 (2 points) : Déterminer les prix p et w qui permettent d'équilibrer les deux marchés.

Question 6 (2 points) : Déterminer la quantité de nourriture consommée par Robinson ainsi que son temps de travail.

4 Correction (éléments de)

4.1 Économie sans production (8 points)

Question 1 (4 points) : Comme économiste, vous devez commencer par conseiller de choisir un optimum de Pareto. La première étape consiste donc à calculer l'équation de la courbe des contrats. Sur la partie située à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth, on doit avoir :

$$Tms_A\left(x_A, y_A\right) = Tms_B\left(x_B, y_B\right) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_A}}}{1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_B}}}{\frac{1}{2\sqrt{y_B}}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_A}} = \frac{\sqrt{y_B}}{\sqrt{x_B}} \Leftrightarrow \frac{1}{4x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

En utilisant le fait que les allocations doivent être réalisables, on obtient :

$$\frac{1}{4x_A} = \frac{10 - y_A}{20 - x_A} \Leftrightarrow \frac{20 - x_A}{4x_A} = 10 - y_A \Leftrightarrow y_A = 10 - \frac{20 - x_A}{4x_A} \Leftrightarrow y_A = \frac{41x_A - 20}{4x_A}$$

Pour les valeurs faibles de x_A, la formule précédente donne des valeurs négatives pour y_A.

$$\frac{41x_A - 20}{4x_A} < 0 \Leftrightarrow 41x_A - 20 < 0 \Leftrightarrow x_A < \frac{20}{41} \simeq 0,4878$$

Pour ces valeurs, la courbe des contrats est confondue avec le bord inférieur de la boite d'Edgeworth.

La seconde étape consiste à choisir un point sur la courbe des contrats. Cela fait intervenir des notions de justice et de valeurs et il n'y a pas de solution unique a priori. Il faut donc annoncer le critère de justice que vous préférez et calculer l'allocation correspondant à ce critère.

Question 2 (4 points) : Le second théorème de l'économie du bien-être énonce que, si les préférences des consommateurs sont convexes, alors n'importe quel optimum de Pareto peut être obtenu comme un équilibre concurrentiel. Pour atteindre l'allocation qu'on a choisie dans la question 1, on peut (1) modifier les dotations initiales par des transferts forfaitaires, puis (2) laisser les consommateurs échanger librement sur des marchés concurrentiels.

Comme vous avez potentiellement opté pour une allocation différente à la question 1, on résoud l'équilibre concurrentiel pour des dotations initiales générales.

Fonctions de demande de A : On recherche les fonctions de demande de l'agent A. Il a des préférences quasi-linéaires, on aura donc une solution intérieure pour certaines dotations initiales et une solution en coin pour d'autres. On commence par les solutions intérieures. Elles doivent vérifier :

$$\left\{\begin{array}{c} Tms_A\left(x_A, y_A\right) = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = R_A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{x_A}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_y y_A = R_A - p_x x_A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x_A} = \frac{p_y}{2p_x} \\ y_A = \frac{R_A}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x_A \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_A = \frac{p_y^2}{4p_x^2} \\ y_A = \frac{R_A}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}\frac{p_y^2}{4p_x^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_A = \frac{p_y^2}{4p_x^2} \\ y_A = \frac{R_A}{p_y} - \frac{p_y}{4p_x} \end{array}\right\}$$

On vérifie que la solution est intérieure, en recherchant pour quelles valeurs de R_A, la formule de y_A donne une valeur positive :

$$y_A \geq 0 \Leftrightarrow \frac{R_A}{p_y} - \frac{p_y}{4p_x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{R_A}{p_y} \geq \frac{p_y}{4p_x} \Leftrightarrow R_A \geq \frac{p_y^2}{4p_x} \Leftrightarrow p_x\omega_x^A + p_y\omega_y^A \geq \frac{p_y^2}{4p_x}$$

Si $p_x\omega_x^A + p_y\omega_y^A < \frac{p_y^2}{4p_x}$, on a une solution en coin :

$$x_A = \frac{R_A}{p_x} \qquad \text{et} \qquad y_A = 0$$

Fonctions de demande de B : La fonction de B est de type CES. La solution sera intérieure :

$$\left\{ \begin{array}{c} Tms_B\left(x_B, y_B\right) = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = R_B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{y_B}}{\sqrt{x_B}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = R_B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{y_B}{x_B} = \frac{p_x^2}{p_y^2} \\ p_x x_B + p_y y_B = R_B \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_y y_B = \frac{p_x}{p_y} p_x x_B \\ p_x x_B + \frac{p_x}{p_y} p_x x_B = R_B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_y y_B = \frac{p_x}{p_y} p_x x_B \\ \frac{p_x + p_y}{p_y} p_x x_B = R_B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_y y_B = \frac{p_x}{p_y} p_x x_B \\ p_x x_B = \frac{p_y}{p_x + p_y} R_B \end{array} \right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_y y_B = \frac{p_x}{p_y} \frac{p_y}{p_x + p_y} R_B \\ x_B = \frac{p_y}{p_x} \frac{R_B}{p_x + p_y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = \frac{p_x}{p_y} \frac{R_B}{p_x + p_y} \\ x_B = \frac{p_y}{p_x} \frac{R_B}{p_x + p_y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = \frac{p_x}{p_y} \frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} \\ x_B = \frac{p_y}{p_x} \frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} \end{array} \right\}$$

Équilibres concurrentiels : Il est probable que la plupart d'entre-vous (ayant répondu à cette question) ont choisi un optimum de Pareto correspondant à une solution intérieure. On commence donc par rechercher les prix et les allocations d'équilibre lorsque la solution est intérieure. On doit avoir :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow \frac{p_y^2}{4p_x^2} + \frac{p_y}{p_x} \frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} = 20 \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow \frac{p_x\omega_x^A + p_y\omega_y^A}{p_y} - \frac{p_y}{4p_x} + \frac{p_x}{p_y} \frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} = 10 \end{aligned}$$

Si on trouve un couple de prix qui équilibre l'un des marchés, il équilibrera aussi le second (c'est une conséquence de la loi de Walras). On cherche à équilibrer le marché du bien x. On choisit le bien x comme bien numéraire. On pose donc $p_x = 1$. Il vient :

$$\frac{p_y^2}{4p_x^2} + \frac{p_y}{p_x} \frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} = 20 \Leftrightarrow \frac{p_y^2}{4} + \frac{p_y\omega_x^B + p_y^2\omega_y^B}{1 + p_y} = 20 \Leftrightarrow \left(1 + p_y\right) p_y^2 + 4p_y\omega_x^B + 4p_y^2\omega_y^B = 80\left(1 + p_y\right)$$

$$\Leftrightarrow p_y^2 + p_y^3 + 4p_y\omega_x^B + 4p_y^2\omega_y^B = 80 + 80p_y \Leftrightarrow p_y^3 + \left(4\omega_y^B + 1\right) p_y^2 + \left(4\omega_x^B - 80\right) p_y - 80 = 0$$

Scientific WorkPlace permet de résoudre cette équation. Les formules sont longues. On ne va donc pas résoudre pour des dotations générales, mais chercher des solutions numériques pour des dotations particulières. Il ne me reste plus qu'à espérer que vous n'avez pas tous fait des choix différents.

On peut commencer par les allocations données dans l'énoncé (à tous les coups, beaucoup les auront prises). L'équation précédente devient :

$$p_y^3 + (4 \times 8 + 1)\, p_y^2 + (4 \times 16 - 80)\, p_y - 80 = 0 \Leftrightarrow p_y^3 + 33p_y^2 - 16p_y - 80 = 0$$

La fonction "solve numeric" de Scientific WorkPlace donne trois solutions : $-33,407$; $-1,357$; $1,764$. Seule le dernière est positive. On a donc : $p_y \simeq 1,764$. $\frac{1}{p_y} \simeq 0,567$.

Il n'y a pas vraiment de raison de conserver les dotations initiales. Elles ont été délibérément choisies inégales et, étant de "culture française", on pouvait s'attendre à ce que vous proposiez de redistribuer les dotations initiales pour les rendre plus égales.

On choisit de les égaliser totalement $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 5\right)$ et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 5\right)$. On calcule l'équilibre pour ces dotations :

$$p_y^3 + \left(4\omega_y^B + 1\right) p_y^2 + \left(4\omega_x^B - 80\right) p_y - 80 = 0 \Leftrightarrow p_y^3 + 21p_y^2 - 40p_y - 80 = 0$$

Ce polynôme admet trois racines réelles. Deux sont négatives. On conserve la troisième qui est positive : $p_y \simeq 2,853$.

On calcule les demandes brutes des deux individus pour ces dotations et ces prix d'équilibre :

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{p_y^2}{4p_x^2} \simeq 2,035 \quad ; \quad y_A = \frac{R_A}{p_y} - \frac{p_y}{4p_x} \simeq 7,792 \\ x_B &= \frac{p_y}{p_x}\frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} \simeq 17,967 \quad ; \quad y_B = \frac{p_x}{p_y}\frac{p_x\omega_x^B + p_y\omega_y^B}{p_x + p_y} \simeq 2,207 \end{aligned}$$

Il est donc possible de proposer ces quantités comme l'allocation conseillée à la question 1 en avançant quelles se trouvent sur la courbe des contrats et quelles correspondent à une certaine forme d'égalité (celle des dotations initiales). A la question 2, on propose de transférer des ressources de l'individu B vers l'individu B puis de laisser les deux individus échanger librement sur des marchés concurrentiels. Les transferts devant être effectués peuvent par exemple être : 6 unités du bien x et 3 unités du bien y sont prélevées à B pour être données à A.

4.2 Économie onirique (6 points)

Question 3 (6 points) : Le cœur se trouve sur la courbe des contrats. On commence par calculer l'équation de cette dernière :

$$Tms_A\,(x_A, y_A) = Tms_B\,(x_B, y_B) \Leftrightarrow \frac{2y_A}{2x_A} = \frac{y_B^2}{2x_B y_B} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{2x_B}$$

En utilisant le fait que les allocations doivent être réalisables, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{y_A}{x_A} &= \frac{10-y_A}{2(20-x_A)} \Leftrightarrow 2y_A(20-x_A) = x_A(10-y_A) \Leftrightarrow 40y_A - 2x_Ay_A = 10x_A - x_Ay_A \\ &\Leftrightarrow 40y_A - x_Ay_A = 10x_A \Leftrightarrow (40-x_A)\,y_A = 10x_A \Leftrightarrow y_A = \frac{10x_A}{40-x_A}\end{aligned}$$

Pour être dans le cœur, une allocation doit procurer à A un niveau de satisfaction au moins égal à celui donné par son allocation initiale. $U_A(x_A, y_A) = 2 \times 20 \times 0 = 0$. Toutes les allocations situées dans la boîte d'Edgeworth vérifient cette condition. Idem pour l'individu B. Le cœur de cette économie correspond à l'intégralité de la courbe des contrats.

4.3 Économie avec production (6 points)

Question 4 (2 points) : Si la solution est intérieure (et avec une Cobb-Douglas, elle l'est nécessairement), on doit avoir :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c} Tms(C,L) = \frac{w}{p} \\ pC + wL = 16w + \pi \end{array}\right\} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{C}{L} = \frac{w}{p} \\ pC + wL = 16w + \pi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} wL = pC \\ 2pC = 16w + \pi \end{array}\right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} wL = \frac{16w+\pi}{2} \\ pC = \frac{16w+\pi}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} L = \frac{16w+\pi}{2w} \\ C = \frac{16w+\pi}{2p} \end{array}\right\}\end{aligned}$$

Comme la fonction de production est à rendements d'échelle constants, les profits vont être nuls. On a donc $\pi = 0$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} C &= \frac{16w+\pi}{2p} = \frac{16w}{2p} = 8\frac{w}{p} \\ L &= \frac{16w+\pi}{2w} = \frac{16w}{2w} = 8 \end{aligned}$$

La demande de nourriture est égale à $8\frac{w}{p}$. L'offre de travail est égale à 8 $(= 16 - 8)$.

Question 5 (2 points) : La fonction de production est à rendements d'échelle constants, les profits vont être nuls. Le prix de vente du bien doit être égal à son coût de production unitaire. Avec une heure de travail, on produit deux unités du bien. Donc pour produire une unité du bien, on a besoin de une demi-heure de travail. On a donc :

$$p = \frac{w}{2}$$

On peut poser $w = 2$. On a alors $p = 1$.

Question 6 (2 points) : A l'équilibre, on a :

$$C = 8\frac{w}{p} = 16 \qquad \text{et} \qquad h = 16 - L = 8$$