L2 Économie-Gestion
Microéconomie 2 - examen 1
(Durée : 2 heures)

13 mars 2017

Les calculatrices **non programmables** sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Économie d'échanges (14 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \ln x_A + \ln y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = 2\sqrt{x_B} + y_B$.

Question 1 (5 points) : Calculer l'équation de la courbe des contrats. Représenter cette courbe dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (5 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 6, \omega_y^A = 6\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 14, \omega_y^B = 4\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

Question 3 (4 points) : L'État souhaite que l'agent A consomme exactement 8 unités du bien y à l'équilibre. Le seul instrument dont l'État dispose est la possibilité de transférer des unités du bien x de A vers B ou de B vers A. Quel transfert doit-il effectuer pour atteindre son objectif ?

2 Loi de Walras (3 points)

Question 4 (3 points) : Rappeler la loi de Walras. Refaire sa démonstration.

3 Optima de Pareto (2 points)

Question 5 (2 points) : Représenter un exemple où un optimum de Pareto ne peut pas être obtenu comme un équilibre concurrentiel.

4 Cœur d'une économie (5 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \ln x_A + \ln y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \min(x_B, y_B)$. Les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 5\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 5\right)$ pour l'agent B.

Question 6 (5 points) : Déterminer le cœur de cette économie.

5 Correction (éléments de)

5.1 Économie d'échanges (14 points)

Question 1 (5 points) : On commence par rechercher les optima de Pareto se trouvant à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth. Ils sont caractérisés par l'égalité des Tms des deux individus.

$$Tms_A\left(x_A, y_A\right) = Tms_B\left(x_B, y_B\right) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x_A}}{\frac{1}{y_A}} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x_B}}}{1} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{\sqrt{x_B}}$$

On a, en outre :

$$\left\{\begin{array}{l} x_A + x_B = 20 \\ y_A + y_B = 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_B = 20 - x_A \\ y_B = 10 - y_A \end{array}\right\}$$

En combinant ces relations, on obtient :

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{\sqrt{20 - x_A}} \Leftrightarrow y_A = \frac{x_A}{\sqrt{20 - x_A}}$$

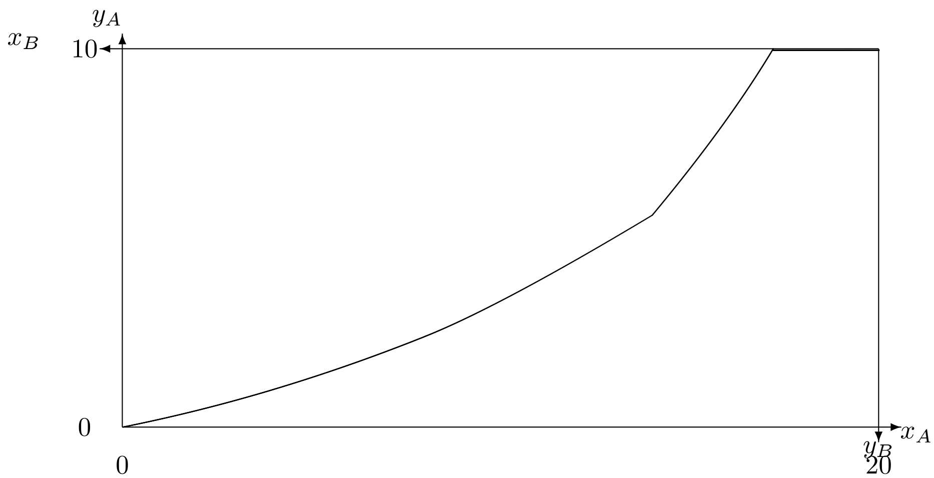
On calcule l'intersection de cette courbe avec le bord supérieur de la boîte.

$$y_A = 10 \Leftrightarrow \frac{x_A}{\sqrt{20 - x_A}} = 10 \Leftrightarrow \frac{x_A^2}{20 - x_A} = 100 \Leftrightarrow x_A^2 = 2000 - 100x_A \Leftrightarrow x_A^2 + 100x_A - 2000 = 0$$

Ce polynôme du second degré admet deux racines. L'une est négative ; l'autre est très proche de 17,08.

Pour $x_A > 17,08$, les valeurs de y_A qui permettent d'égaliser les deux Tms sont supérieures à 10 et correspondent donc à des allocations non réalisables. Pour ces valeurs, les optima de Pareto se trouvent très probablement sur le bord supérieur de la boîte. On peut le vérifier en comparant les Tms des deux individus pour ces allocations. Les courbes d'indifférence des deux individus sont convexes. Les Tms des deux individus sont donc décroissants en valeur absolue lorsqu'on se déplace le long des courbes d'indifférence. Lorsqu'on se déplace vers la droite, le Tms de A décroît en valeur absolue et celui de B augmente en valeur absolue. Sur la courbe $y_A = \frac{x_A}{\sqrt{20-x_A}}$, les Tms sont égaux. A droite de cette courbe, $Tms_A\left(x_A, y_A\right) < Tms_B\left(x_B, y_B\right)$.

Si $Tms_A < Tms_B$, une unité du bien x a plus de valeur (exprimée en unités du bien y) pour B que pour A. Un échange mutuellement avantageux serait que B reçoive des unités du bien x en échange d'unités du bien y. Cependant de tels échanges ne sont pas réalisables, car l'individu B n'a aucune unité du bien y à échanger. Des échanges mutuellement avantageux ne sont donc pas possibles sur ce morceau du bord supérieur de la boîte. Les allocations telles que $y_A = 10$ et $x_A > 17,08$ sont donc des optima de Pareto.



Question 2 (5 points) : La fonction d'utilité de l'agent A est une Cobb-Douglas. Les fonctions de demande brute de cet individu sont égales à (voir TD1 pour les détails) :

$$x_A = \frac{1}{2}\frac{6p_x + 6p_y}{p_x} = 3 + 3\frac{p_y}{p_x} \qquad \text{et} \qquad y_A = \frac{1}{2}\frac{6p_x + 6p_y}{p_y} = 3\frac{p_x}{p_y} + 3$$

La fonction d'utilité de l'agent B est quasi-linéaire. Avec ce type de fonction, on a une solution intérieure si le revenu de l'individu est suffisamment élevé et une solution en coin s'il est faible. On peut cependant exclure que l'équilibre soit une solution en coin. L'équilibre concurrentiel doit se trouver sur la courbe des contrats (théorème 1 de l'économie du bien-être). On peut exclure la partie de la courbe des contrats se trouvant à droite et au-dessus du point de dotations initiales. On exclut ainsi la partie de la courbe des contrats se trouvant sur le bord supérieur de la boîte d'Edgeworth. Il ne reste donc que des solutions intérieures.

On recherche les fonctions de demande de l'individu B (en se limitant aux cas où la solution est intérieure) :

$$\left\{\begin{array}{c} Tms_B = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = 14p_x + 4p_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{2\frac{1}{2\sqrt{x_B}}}{1} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = 14p_x + 4p_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{x_B}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = 14p_x + 4p_y \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{p_y}{p_x}p_y = p_x x_B \\ \frac{p_y}{p_x}p_y + p_y y_B = 14p_x + 4p_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{p_y^2}{p_x^2} = x_B \\ p_y y_B = 14p_x + 4p_y - \frac{p_y}{p_x}p_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_B = \frac{p_y^2}{p_x^2} \\ y_B = 14\frac{p_x}{p_y} + 4 - \frac{p_y}{p_x} \end{array}\right\}$$

Les conditions d'équilibre sur les deux marchés sont :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{6p_x + 6p_y}{p_x} + \frac{p_y^2}{p_x^2} = 20 \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{6p_x + 6p_y}{p_y} + 14\frac{p_x}{p_y} + 4 - \frac{p_y}{p_x} = 10 \end{aligned}$$

La première équation semble la plus facile à résoudre. On choisit le bien x comme bien numéraire et on pose $p_x = 1$. On obtient :

$$3 + 3p_y + p_y^2 = 20 \Leftrightarrow p_y^2 + 3p_y - 17 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 \times 17 = 77$$

Le polynôme admet deux racines :

$$\frac{-3-\sqrt{77}}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{-3+\sqrt{77}}{2} \simeq 2,887$$

Équilibre :

$$\begin{aligned} p_x &= 1 \; ; \; x_A = 3 + 3\frac{p_y}{p_x} \simeq 11,662 \; ; \; x_B = \frac{p_y^2}{p_x^2} \simeq 8,338 \\ p_y &= \frac{-3+\sqrt{77}}{2} \simeq 2,887 \; ; \; y_A = 3\frac{p_x}{p_y} + 3 \simeq 4,039 \; ; \; y_B = 14\frac{p_x}{p_y} + 4 - \frac{p_y}{p_x} \simeq 5,962 \end{aligned}$$

Question 3 (4 points) : L'économie continuant de fonctionner de façon concurrentielle, l'allocation finale sera donnée par l'équilibre concurrentiel et se trouvera donc sur la courbe des contrats.

On veut avoir $y_A = 8$ et on a :

$$y_A = \frac{x_A}{\sqrt{20 - x_A}} \Leftrightarrow 8\sqrt{20 - x_A} = x_A \Leftrightarrow 64\,(20 - x_A) = x_A^2 \Leftrightarrow x_A^2 + 64x_A - 1280 = 0$$

$$\Delta = 64^2 + 4 \times 1280 = 9216 = 96^2$$

$$x_A = \frac{-64-96}{2} < 0 \qquad \text{ou} \qquad x_A = \frac{-64+96}{2} = 16$$

x_A doit être positif. On a donc $x_A = 16$.

Pour que l'équilibre soit situé au point $x_A = 16$; $y_A = 8$; $x_B = 4$; $y_B = 2$, il faut placer l'allocation initiale sur la droite passant par ce point et ayant comme pente le Tms des individus en ce point.

On doit avoir :

$$\frac{p_x}{p_y} = Tms_A = \frac{y_A}{x_A} = \frac{8}{16} = Tms_B = \frac{1}{\sqrt{x_B}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

L'État ne peut modifier que la répartition initiale du bien x. On doit donc toujours avoir $\omega_y^A = 6$ et $\omega_y^B = 4$. On cherche $\omega_x^{A\prime}$ et $\omega_x^{B\prime}$.

On doit avoir :

$$x_A = \frac{1}{2}\frac{p_x\omega_x^{A\prime} + p_y\omega_y^A}{p_x} = 16 \; ; \; \omega_y^A = 6 \; ; \; \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2}$$

On pose $p_x = 1$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{\omega_x^{A\prime} + 6 \times 2}{1} = 16 \Leftrightarrow \omega_x^{A\prime} + 12 = 32 \Leftrightarrow \omega_x^{A\prime} = 20$$

L'État peut obtenir l'allocation souhaitée en transférant les 14 unités du bien x initialement détenue par l'individu B à l'individu A.

5.2 Cœur d'une économie (5 points)

Question 6 (5 points) : Le cœur de cette économie est constitué de la partie de la courbe des contrats se trouvant entre les courbes d'indifférence des deux individus passant par le point de dotations initiales.

La courbe des contrats est donnée par l'équation $x_B = y_B$.

On doit se trouver au-dessus de la courbe d'indifférence de B passant par $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 5\right)$. On doit donc avoir $x_B \geq 5$ et $y_B \geq 5$.

On doit se trouver au-dessus de la courbe d'indifférence de A passant par $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 5\right)$. Les préférences de A peuvent se réécrire $U_{A2}\left(x_A, y_A\right) = \exp\left(U_A\left(x_A, y_A\right)\right) = x_A y_A$. On doit avoir $x_A y_A \geq 50$. Lorsque $x_B = y_B$, on a $x_A = 10 + y_A$.

$$\left\{ \begin{array}{c} x_A = 10 + y_A \\ x_A y_A \geq 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(10 + y_A\right) y_A \geq 50 \Leftrightarrow y_A^2 + 10 y_A - 50 \geq 0$$

$$\Delta = 100 + 200 = \left(10\sqrt{3}\right)^2$$

On doit avoir $y_A \geq \frac{-10+10\sqrt{3}}{2} \simeq 3,66$.

Le cœur est donc défini par $x_B = y_B$, $y_B \geq 5$ et $y_A \geq 3,66 \Leftrightarrow y_B \leq 6,34$.