# L2 Economie-Gestion - micro-économie 2 - Examen 1 (Durée : 2 heures)

29 février 2016

Les calculatrices **non programmables** sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

## 1 Marché concurrentiel (8 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens ($x$ et $y$). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien $x$ et 10 unités du bien $y$.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = x_A(y_A + 2)$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = x_B y_B$.

**Question 1 (4 points) :** Calculer l'équation de la courbe des contrats. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

**Question 2 (4 points) :** On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 5\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 5\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

## 2 Proposition "à prendre ou à laisser" (6 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens ($x$ et $y$). Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = x_A y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = x_B y_B$. On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 17,5, \omega_y^A = 5\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 2,5, \omega_y^B = 5\right)$ pour l'agent B.

On suppose que le mécanisme de négociation entre les deux individus est le suivant.

1) A propose un échange "à prendre ou à laisser".

2) B observe l'échange proposé par A et choisit de l'accepter ou de le rejeter.

3) Si B a accepté l'échange proposé, l'échange a lieu et la négociation est terminée. Si B a refusé l'échange, la négociation prend fin et les deux individus consomment leurs dotations initiales.

**Question 3 (6 points) :** Déterminer le résultat de ce processus d'échange.

# 3 Répartition (6 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens ($x$ et $y$). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien $x$ et 10 unités du bien $y$. Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \frac{1}{2}\ln x_A + \frac{1}{2}\ln y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \frac{1}{5}\ln x_B + \frac{4}{5}\ln y_B$.

**Question 4 (6 points) :** Proposez une allocation qui vous semble avoir des propriétés souhaitables (en justifiant votre choix), puis proposez une organisation de l'économie qui permet de l'obtenir.

# 4 Correction (éléments de)

## 4.1 Marché concurrentiel (8 points)

**Question 1 (4 points) :** On commence par rechercher les optima de Pareto se trouvant à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth. Ils sont caractérisés par l'égalité des Tms des deux individus.

$$Tms_A(x_A, y_A) = Tms_B(x_B, y_B) \Leftrightarrow \frac{y_A + 2}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

On a, en outre :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow x_B = 20 - x_A \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A \end{aligned}$$

En combinant ces trois relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{y_A + 2}{x_A} &= \frac{10 - y_A}{20 - x_A} \Leftrightarrow (y_A + 2)(20 - x_A) = (10 - y_A)x_A \Leftrightarrow 20y_A - x_A y_A + 40 - 2x_A = 10x_A - x_A y_A \\ &\Leftrightarrow 20y_A = 12x_A - 40 \Leftrightarrow y_A = \frac{12}{20}x_A - 2 \Leftrightarrow y_A = \frac{3}{5}x_A - 2 \end{aligned}$$

On obtient une équation de droite. On calcule les intersections de cette droite et des bords de la boîte.

$$\begin{aligned} y_A &= 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x_A = 2 \Leftrightarrow x_A = \frac{10}{3} \simeq 3,33 \\ y_A &= 10 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x_A - 2 = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x_A = 12 \Leftrightarrow x_A = 20 \end{aligned}$$

Pour $x_A < \frac{10}{3}$, les valeurs de $y_A$ qui permettent d'égaliser les deux Tms sont inférieures à 0 et correspondent donc à des allocations non réalisables. Pour ces valeurs, les optima de Pareto se trouvent très probablement sur le bord de la boîte. On peut le vérifier en comparant les Tms des deux individus pour ces allocations.

Sur ce bord, on a $y_A = 0$ et $y_B = 10$. Les Tms sont donc égaux à :

$$\begin{aligned} Tms_A(x_A, y_A) &= \frac{y_A + 2}{x_A} = \frac{2}{x_A} \\ Tms_B(x_B, y_B) &= \frac{y_B}{x_B} = \frac{10}{x_B} \end{aligned}$$

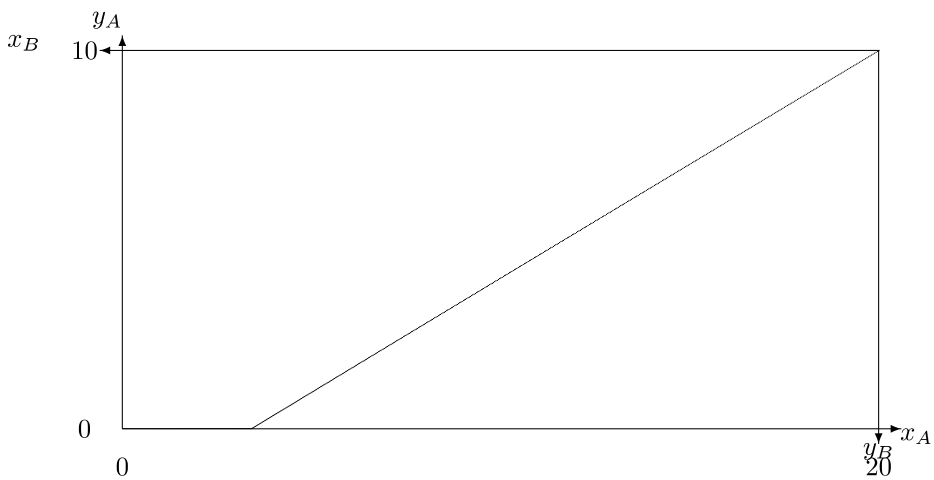
et on a :

$$x_B = 20 - x_A$$

Sur le bord inférieur de la boîte :

$$Tms_A(x_A, y_A) > Tms_B(x_B, y_B) \Leftrightarrow \frac{2}{x_A} > \frac{10}{20 - x_A} \Leftrightarrow 40 - 2x_A > 10x_A \Leftrightarrow 40 > 12x_A \Leftrightarrow \frac{10}{3} > x_A$$

Si $Tms_A > Tms_B$, une unité du bien $x$ a plus de valeur (exprimée en unités du bien $y$) pour A que pour B. Un échange mutuellement avantageux serait que A reçoive des unités du bien $x$ en échange d'unités du bien $y$. Cependant de tels échanges ne sont pas réalisables, car l'individu A n'a aucune unité du bien $y$ à échanger. Des échanges mutuellement avantageux ne sont donc pas possibles sur ce morceau du bord inférieur de la boîte. Les allocations telles que $y_A = 0$ et $x_A < \frac{10}{3}$ sont donc des optima de Pareto.




**Question 2 (4 points) :** Le premier théorème de l'économie du bien-être énonce que les équilibres concurrentiels sont nécessairement des optima de Pareto. L'équilibre que l'on cherche se trouve donc nécessairement sur la courbe des contrats qu'on a trouvée dans la question précédente.

La partie de la courbe des contrats qui est confondue avec le bord inférieur de la boîte se trouve au dessous et à gauche du point de dotations initiales. L'équilibre ne peut donc pas se trouver dans cette zone, car l'individu A devrait accepter une réduction des quantités des deux biens par rapport à sa dotation initiale. L'équilibre que l'on cherche se trouve donc nécessairement à l'intérieur de la boîte.

On peut donc se limiter à calculer les demandes brutes de A lorsque son panier optimal est à l'intérieur de la boîte et négliger les solutions en coin.

**Demandes brutes de A :**

$$Tms_A(x_A, y_A) = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{y_A + 2}{x_A} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow p_y(y_A + 2) = p_x x_A$$

Contrainte budgétaire :

$$p_x x_A + p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \Leftrightarrow p_x x_A + p_y y_A = 10p_x + 5p_y$$

En combinant les deux, on obtient :

$$\begin{aligned} p_y(y_A+2)+p_y y_A &= 10p_x+5p_y \Leftrightarrow 2p_y y_A+2p_y=10p_x+5p_y \Leftrightarrow 2p_y y_A=10p_x+3p_y \\ &\Leftrightarrow y_A=\frac{10p_x+3p_y}{2p_y} \Leftrightarrow y_A=5\frac{p_x}{p_y}+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

et

$$p_y\left(5\frac{p_x}{p_y}+\frac{3}{2}+2\right)=p_x x_A \Leftrightarrow x_A=\frac{p_y}{p_x}\left(5\frac{p_x}{p_y}+\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow x_A=5+\frac{7}{2}\frac{p_y}{p_x}$$

**Demandes brutes de B :**

$$Tms_B(x_B,y_B)=\frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{y_B}{x_B}=\frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow p_y y_B=p_x x_B$$

Contrainte budgétaire :

$$p_x x_B+p_y y_B=p_x\omega_x^B+p_y\omega_y^B \Leftrightarrow p_x x_B+p_y y_B=10p_x+5p_y$$

En combinant les deux, on obtient :

$$p_x x_B+p_x x_B=10p_x+5p_y \Leftrightarrow 2p_x x_B=10p_x+5p_y \Leftrightarrow x_B=\frac{10p_x+5p_y}{2p_x} \Leftrightarrow x_B=5+\frac{5}{2}\frac{p_y}{p_x}$$

et

$$p_y y_B=p_x x_B \Leftrightarrow p_y y_B=p_x\frac{10p_x+5p_y}{2p_x} \Leftrightarrow y_B=\frac{10p_x+5p_y}{2p_y} \Leftrightarrow y_B=5\frac{p_x}{p_y}+\frac{5}{2}$$

**Equilibre :**

$$\left\{\begin{array}{c} \left(x_A-\omega_x^A\right)+\left(x_B-\omega_x^B\right)=0 \\ \left(y_A-\omega_y^A\right)+\left(y_B-\omega_y^B\right)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left(5+\frac{7}{2}\frac{p_y}{p_x}-10\right)+\left(5+\frac{5}{2}\frac{p_y}{p_x}-10\right)=0 \\ \left(5\frac{p_x}{p_y}+\frac{3}{2}-5\right)+\left(5\frac{p_x}{p_y}+\frac{5}{2}-5\right)=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{12}{2}\frac{p_y}{p_x}-10=0 \\ 10\frac{p_x}{p_y}-\frac{12}{2}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{p_y}{p_x}=\frac{10}{6} \\ \frac{p_x}{p_y}=\frac{6}{10} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{p_x}{p_y}=\frac{3}{5}$$

D'où :

$$\begin{array}{ll} x_A=5+\frac{7}{2}\frac{p_y}{p_x}=5+\frac{7}{2}\frac{5}{3}=\frac{65}{6} & y_A=5\frac{p_x}{p_y}+\frac{3}{2}=5\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2} \\ x_B=5+\frac{5}{2}\frac{p_y}{p_x}=5+\frac{5}{2}\frac{5}{3}=\frac{55}{6} & y_B=5\frac{p_x}{p_y}+\frac{5}{2}=5\frac{3}{5}+\frac{5}{2}=\frac{11}{2} \end{array}$$

## 4.2 Proposition "à prendre ou à laisser" (6 points)

A va nécessairement proposer à B une allocation se situant sur la courbe des contrats. Sinon, A pourrait augmenter la satisfaction soit de B, soit de lui-même, en proposant une autre allocation.

Pour que B accepte, A doit proposer une allocation procurant à B une satisfaction au moins aussi grande que celle qu'il obtiendrait en conservant ses dotations initiales.

A va donc proposer à B l'allocation se trouvant sur la courbe des contrats et donnant à B son "utilité de réserve" (c'est-à-dire le même niveau de satisfaction que s'il refusait l'échange proposé).

On calcule l'équation de la courbe des contrats :

$$Tms_A\left(x_A, y_A\right) = Tms_B\left(x_B, y_B\right) \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

On a, en outre :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow x_B = 20 - x_A \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A \end{aligned}$$

En combinant ces trois relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{y_A}{x_A} &= \frac{y_B}{x_B} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{10 - y_A}{20 - x_A} \Leftrightarrow \left(20 - x_A\right) y_A = \left(10 - y_A\right) x_A \Leftrightarrow 20 y_A - x_A y_A = 10 x_A - x_A y_A \\ &\Leftrightarrow 20 y_A = 10 x_A \Leftrightarrow y_A = \frac{1}{2} x_A \end{aligned}$$

L'utilité de réserve de B est donnée par :

$$U_B\left(\omega_x^B, \omega_y^B\right) = 2,5 \times 5 = 12,5$$

L'allocation proposée par A doit vérifier :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{c} y_A = \frac{1}{2} x_A \\ x_B y_B = 12,5 \\ x_A + x_B = 20 \\ y_A + y_B = 10 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_A = \frac{1}{2} x_A \\ x_B y_B = 12,5 \\ x_B = 20 - x_A \\ y_B = 10 - y_A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_A = \frac{1}{2} x_A \\ \left(20 - x_A\right)\left(10 - y_A\right) = 12,5 \\ x_B = 20 - x_A \\ y_B = 10 - y_A \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_A = \frac{1}{2} x_A \\ \left(20 - x_A\right)\left(10 - \frac{1}{2} x_A\right) = 12,5 \\ x_B = 20 - x_A \\ y_B = 10 - y_A \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On résoud la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \left(20 - x_A\right)\left(10 - \frac{1}{2} x_A\right) &= 12,5 \Leftrightarrow 200 - 10 x_A - 10 x_A + \frac{1}{2} x_A^2 = 12,5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} x_A^2 - 20 x_A + 187,5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_A^2 - 40 x_A + 375 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 40^2 - 4 \times 1 \times 375 = 1600 - 1500 = 100 \\ x_1 &= \frac{40 - \sqrt{100}}{2} = 15 \\ x_2 &= \frac{40 + \sqrt{100}}{2} = 25 \end{aligned}$$

La seconde racine ne peut pas être la solution du problème, car elle correspond à une allocation non réalisable. La solution est donc : $x_A = 15$. D'où :

$$x_A = 15 \quad ; \quad y_A = \frac{1}{2}x_A = 7,5 \quad ; \quad x_B = 20 - x_A = 5 \quad ; \quad y_B = 10 - y_A = 2,5$$

A propose de donner à B 2,5 unités du bien $x$ et que B lui donne en échange de 2,5 unités du bien $y$.

## 4.3 Répartition (6 points)

**Question 4 (6 points) :** La première propriété souhaitable est que l'allocation soit efficace au sens de Pareto. On va donc choisir l'un des points de la courbe des contrats. On commence donc par calculer l'équation de cette courbe.

$$Tms_A(x_A, y_A) = Tms_B(x_B, y_B) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2x_A}}{\frac{1}{2y_A}} = \frac{\frac{1}{5x_B}}{\frac{4}{5y_B}} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{4x_B}$$

On a, en outre :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow x_B = 20 - x_A \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A \end{aligned}$$

En combinant ces trois relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{y_A}{x_A} &= \frac{y_B}{4x_B} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{10 - y_A}{4(20 - x_A)} \Leftrightarrow 4(20 - x_A)\,y_A = (10 - y_A)\,x_A \Leftrightarrow 80y_A - 4x_Ay_A = 10x_A - x_Ay_A \\ &\Leftrightarrow 80y_A - 3x_Ay_A = 10x_A \Leftrightarrow (80 - 3x_A)\,y_A = 10x_A \Leftrightarrow y_A = \frac{10x_A}{80 - 3x_A} \end{aligned}$$

Les autres propriétés souhaitables pour l'allocation sont beaucoup plus subjectives. Il semble souhaitable que l'allocation soit "juste". Par exemple, prendre l'un des points extrêmes de la courbe des contrats en donnant tout à A ou tout à B ne semble pas très juste. On peut donc souhaiter une certaine égalité entre les deux individus. Mais, on peut concevoir plusieurs types d'égalité.

(1) Doit-on égaliser les utilités obtenues (ce qui dans ce cas serait équivalent au critère du maximin de Rawls) ? Le point ainsi sélectionné sur la courbe des contrats pourrait ensuite être obtenu en organisant des marchés concurrentiels et en choisissant adéquatement les dotations initiales. Mais, les niveaux d'utilité ne sont pas nécessairement comparables entre les individus.

(2) On pourrait aussi donner les mêmes dotations initiales aux deux individus et les laisser ensuite échanger en organisant des marchés concurrentiels (l'équilibre se situerait nécessairement sur la courbe des contrats : premier théorème de l'économie du bien-être). Si on retient cette méthodologie, on n'avait pas besoin de calculer la courbe des contrats.

**Choix 1 :** On souhaite égaliser les niveaux d'utilité des deux individus.

$$U_A(x_A, y_A) = U_B(x_B, y_B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x_A + \frac{1}{2}\ln y_A = \frac{1}{5}\ln x_B + \frac{4}{5}\ln y_B$$
$$\Leftrightarrow \ln x_A^{1/2} y_A^{1/2} = \ln x_B^{1/5} y_B^{4/5} \Leftrightarrow x_A^{1/2} y_A^{1/2} = x_B^{1/5} y_B^{4/5}$$

L'allocation proposée doit vérifier :

$$\left\{ \begin{array}{c} y_A = \frac{10x_A}{80-3x_A} \\ x_A^{1/2} y_A^{1/2} = x_B^{1/5} y_B^{4/5} \\ x_A + x_B = 20 \\ y_A + y_B = 10 \end{array} \right\}$$

Les calculs ont l'air un peu compliqués.

On va donc opter pour le choix 2, qui paraît plus simple à calculer, mais on ne va pas justifier ce choix par la facilité (même si c'est la vraie raison), mais en mettant en avant qu'on a vu en L1 que l'utilité est un concept ordinal et que les comparaisons entre personnes n'ont pas de sens.

**Choix 2 :** L'Etat choisit donc l'allocation initiale $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 5\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 5\right)$ pour l'agent B et laisse ensuite les individus échanger. L'allocation initiale est égalitaire et elle a donc de bonnes chances d'être acceptée comme juste. En revanche, il est indispensable de laisser ensuite les individus réaliser des échanges, car l'allocation initiale n'est pas située sur la courbe des contrats. L'Etat met donc en place un processus d'échange avec des marchés concurrentiels. Ce qui garantit que l'allocation finale sera optimale au sens de Pareto (premier théorème de l'économie du bien-être). Le grand avantage de cette méthodologie est que l'Etat n'a pas besoin de connaître les préférences des deux individus. La procédure proposée est donc simple et économe en information.

L'énoncé demandant une allocation précise. On va devoir calculer l'équilibre obtenu.

**Demandes brutes de A :** Ce sont des fonctions Cobb-Douglas, on va donc renvoyer le lecteur au TD1 pour les calculs. On a :

$$x_A = \frac{1}{2}\frac{10p_x + 5p_y}{p_x}$$
$$y_A = \frac{1}{2}\frac{10p_x + 5p_y}{p_y}$$

**Demandes brutes de B :**

$$x_B = \frac{1}{5}\frac{10p_x + 5p_y}{p_x}$$
$$y_B = \frac{4}{5}\frac{10p_x + 5p_y}{p_x}$$

**Equilibre :**

$$\left\{\begin{array}{c}\left(x_A-\omega_x^A\right)+\left(x_B-\omega_x^B\right)=0\\ \left(y_A-\omega_y^A\right)+\left(y_B-\omega_y^B\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{10p_x+5p_y}{p_x}-10\right)+\left(\frac{1}{5}\frac{10p_x+5p_y}{p_x}-10\right)=0\\ \left(\frac{1}{2}\frac{10p_x+5p_y}{p_y}-5\right)+\left(\frac{4}{5}\frac{10p_x+5p_y}{p_y}-5\right)=0\end{array}\right\}$$

On n'a pas encore utilisé les implications de la loi de Walras pour simplifier la résolution d'un équilibre (car les calculs précédents étaient simples). On va le faire maintenant pour bien montrer au correcteur qu'on connaît son cours.

On sait que, si on trouve un couple de prix qui équilibre la seconde équation, ce couple de prix va nécessairement aussi équilibrer la première équation. On peut aussi normaliser un des prix. On choisit de poser $p_y = 1$.

La seconde équation devient :

$$\frac{1}{2}\left(10p_x+5\right)-5+\frac{4}{5}\left(10p_x+5\right)-5=0\Leftrightarrow 5p_x+\frac{5}{2}-5+8p_x+4-5=0\Leftrightarrow 13p_x-\frac{7}{2}=0\Leftrightarrow p_x=\frac{7}{26}$$

Les quantités consommées sont égales à :

$$\begin{array}{ll}x_A=\frac{1}{2}\frac{10p_x+5p_y}{p_x}=\frac{1}{2}\frac{200}{7}=\frac{100}{7}\simeq 14,29 & y_A=\frac{1}{2}\frac{10p_x+5p_y}{p_y}=\frac{1}{2}\frac{200}{26}=\frac{50}{13}\simeq 3,85\\ x_B=\frac{1}{5}\frac{10p_x+5p_y}{p_x}=\frac{1}{5}\frac{200}{7}=\frac{40}{7}\simeq 5,71 & y_B=\frac{4}{5}\frac{10p_x+5p_y}{p_y}=\frac{80}{13}\simeq 6,15\end{array}$$

$$10p_x+5p_y=10\frac{7}{26}+5=10\frac{7}{26}+5=\frac{200}{26}\qquad\frac{10p_x+5p_y}{p_x}=\frac{\frac{200}{26}}{\frac{7}{26}}=\frac{200}{7}$$