L2 Economie - micro-économie 2 - Examen 1
Durée 2 heures

16 mars 2015

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Exercice 1 (7 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \sqrt{x_A} + \sqrt{y_A}$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = x_B + \sqrt{y_B}$.

Question 1 (3 points) : Calculer l'équation de la courbe des contrats. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 18, \omega_y^A = 2\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 2, \omega_y^B = 8\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

2 Exercice 2 (6 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = x_A y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \min(x_B, y_B)$.

Question 1 (2 points) : Donner la définition de la courbe des contrats. Calculer son équation. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 10\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 0\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

3 Exercice 3 (7 points)

Robinson Crusoë est seul sur son île. Chaque jour, il dispose de 16 heures (hors sommeil) à répartir entre le travail et le loisir. Le travail permet de trouver de la nourriture dans l'intérieur de l'île. La fonction de production est : $F(h) = 2\sqrt{h}$ où h est le nombre d'heures travaillées. La fonction d'utilité de Robinson est $U(C, L) = \min(C, L)$, où C est la quantité de nourriture consommée et L le nombre d'heures de loisir que Robinson s'est octroyé.

Question 1 (2 points) : Déterminer la fonction de demande de nourriture et la fonction d'offre de travail de Robinson-consommateur. On note p le prix unitaire de la nourriture et w le taux de salaire horaire.

Question 2 (2 points) : Déterminer la fonction d'offre de bien et la fonction de demande de travail de Robinson-producteur.

Question 3 (3 points) : Déterminer les prix p et w qui permettent d'équilibrer les deux marchés. Déterminer le panier de consommation de Robinson.

4 Correction (éléments de)

4.1 Exercice 1 (7 points)

Question 1 (3 points) : On commence par rechercher les optima de Pareto se trouvant à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth. Ils sont caractérisés par l'égalité des Tms des deux individus.

$$Tms_A\left(x_A, y_A\right) = Tms_B\left(x_B, y_B\right) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_A}}}{\frac{1}{2\sqrt{y_A}}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y_B}}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y_A}}{\sqrt{x_A}} = 2\sqrt{y_B} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = 4y_B$$

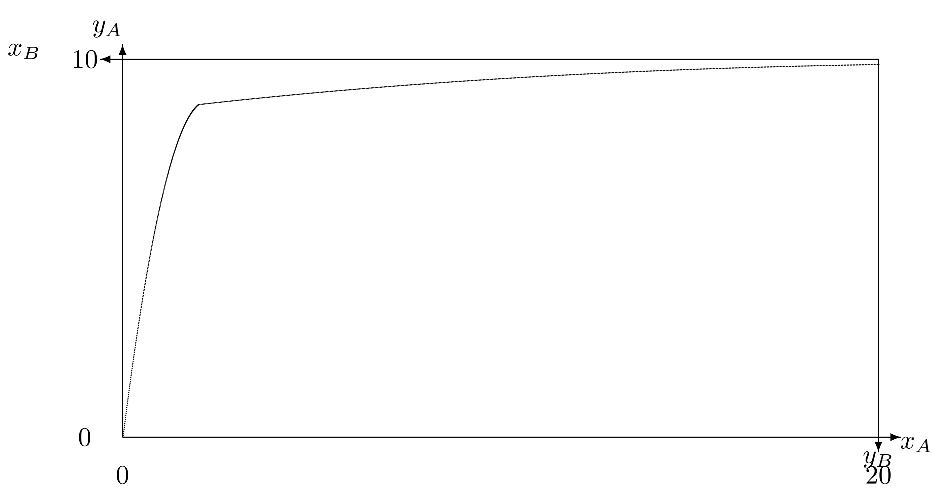
On a, en outre :

$$y_A + y_B = 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{y_A}{x_A} &= 4\left(10 - y_A\right) \Leftrightarrow y_A = 4x_A\left(10 - y_A\right) \Leftrightarrow y_A = 40x_A - 4x_Ay_A \Leftrightarrow y_A + 4x_Ay_A = 40x_A \\ &\Leftrightarrow \left(1 + 4x_A\right)y_A = 40x_A \Leftrightarrow y_A = \frac{40x_A}{1 + 4x_A} \end{aligned}$$

Il reste à tester l'existence d'équilibres sur les bords de la boîte. La courbe des contrats part de l'origine $(x_A = 0, y_A = 0)$, mais n'atteint pas le coin opposé $(x_A = 20, y_A = 10)$. Lorsque les dotations initiales de l'individu sont faibles, ce dernier choisit de consommer un panier en coin. Il choisit $x_B = 0$ et consacre la totalité de son revenu à l'achat du bien y. Une partie de la courbe des contrats se trouve donc sur l'axe où $x_B = 0$.



Question 2 (4 points) : Demandes excédentaires de A[1] :

$$
\begin{aligned}
e_x^A\left(p_x,p_y,\varpi_x^A,\varpi_y^A\right) &= \frac{p_y}{p_x}\frac{1}{p_x+p_y}\left(p_x\varpi_x^A+p_y\varpi_y^A\right)-\varpi_x^A=\frac{p_y}{p_x}\frac{18p_x+2p_y}{p_x+p_y}-18\\
e_y^A\left(p_x,p_y,\varpi_x^A,\varpi_y^A\right) &= \frac{p_x}{p_y}\frac{1}{p_x+p_y}\left(p_x\varpi_x^A+p_y\varpi_y^A\right)-\varpi_y^A=\frac{p_x}{p_y}\frac{18p_x+2p_y}{p_x+p_y}-2
\end{aligned}
$$

La fonction d'utilité de l'individu B est une fonction quasi-linéaire. On a vu, en première année, que les fonctions de demandes brutes associées à ce type de fonctions d'utilité comprennent deux parties. Une partie correspond à une solution intérieure (l'individu consomme des quantités strictement positives des deux biens). L'autre partie correspond à une solution en coin (dans laquelle l'individu ne consomme qu'un seul des deux biens).

On calcule les demandes brutes de l'individu B, en commençant par supposer que la solution est intérieure. On a :

$$
\left\{\begin{array}{c} Tms_B=\frac{p_x}{p_y}\\ p_xx_B+p_yy_B=p_x\omega_x^B+p_y\omega_y^B\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} 2\sqrt{y_B}=\frac{p_x}{p_y}\\ p_xx_B+p_yy_B=2p_x+8p_y\end{array}\right\}
$$

$$
\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} y_B=\frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2\\ p_xx_B=2p_x+8p_y-p_yy_B\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} y_B=\frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2\\ p_xx_B=2p_x+8p_y-\frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y}p_x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} y_B=\frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2\\ x_B=2+8\frac{p_y}{p_x}-\frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y}\end{array}\right\}
$$

Si $2+8\frac{p_y}{p_x}-\frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y}<0$, alors les formules ci-dessus ne sont pas valides. La solution est en coin. On a $x_B=0$ et $y_B=\frac{2p_x+8p_y}{p_y}=2\frac{p_x}{p_y}+8$.

Vu la position du point de dotations initiales par rapport à la courbe des contrats (sur laquelle l'équilibre concurrentiel se trouve nécessairement), l'équilibre sera à l'intérieur de la boîte.

On recherche les prix qui équilibrent le marché du bien y. On doit avoir :

$$
e_y^A+e_y^B=0\Leftrightarrow\frac{p_x}{p_y}\frac{18p_x+2p_y}{p_x+p_y}-2+\frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2-8=0\Leftrightarrow\frac{p_x}{p_y}\frac{18p_x+2p_y}{p_x+p_y}+\frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2=10
$$

On pose $p_y=1$. La condition d'équilibre devient :

$$
p_x\frac{18p_x+2}{p_x+1}+\frac{1}{4}\left(p_x\right)^2=10\Leftrightarrow 18p_x^2+2p_x+\frac{1}{4}\left(1+p_x\right)\left(p_x\right)^2=10\left(1+p_x\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 18p_x^2+2p_x+\frac{1}{4}\left(p_x^2+p_x^3\right)=10+10p_x\Leftrightarrow 18p_x^2-8p_x+\frac{1}{4}\left(p_x^2+p_x^3\right)-10=0\\
&\Leftrightarrow\quad 72p_x^2-32p_x+p_x^2+p_x^3-40=0\Leftrightarrow p_x^3+73p_x^2-32p_x-40=0
\end{aligned}
$$

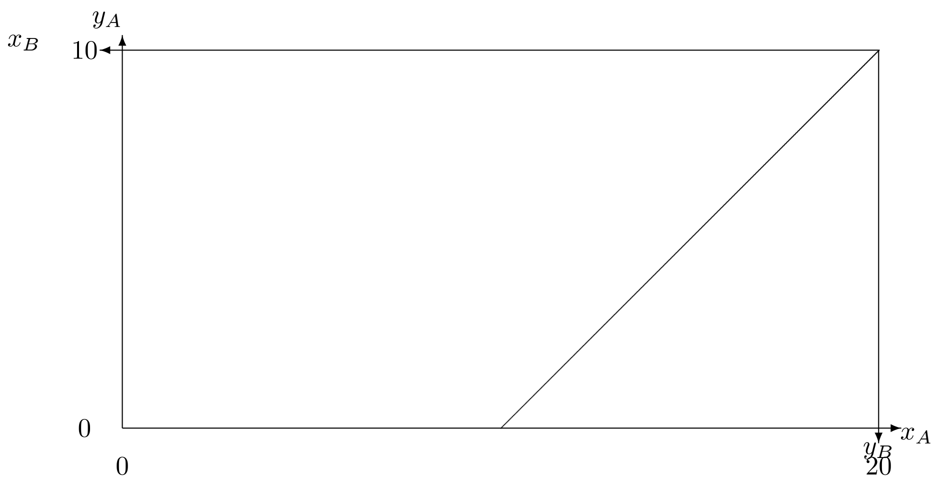
Numériquement, on obtient : $p_x\simeq 0,983$.

La loi de Walras implique que les prix qui équilibrent le marché du bien y équilibrent aussi celui du bien x.

[1] Voir TD2 pour le détail des calculs.

4.2 Exercice 2 (6 points)

Question 1 (2 points) : Les allocations situées sur la courbe des contrats vérifient $x_B = y_B$ et $x_B \leq 10$.



Question 2 (4 points) : Les demandes brutes de l'individu A sont de la forme[2] :

$$\begin{aligned} x^A &= \frac{a}{a+b}\frac{p_x\varpi_x^A + p_y\varpi_y^A}{p_x} = \frac{1}{2}\frac{10p_x + 10p_y}{p_x} \\ y^A &= \frac{b}{a+b}\frac{p_x\varpi_x^A + p_y\varpi_y^A}{p_y} = \frac{1}{2}\frac{10p_x + 10p_y}{p_y} \end{aligned}$$

Demandes excédentaires de B[3] :

$$\begin{aligned} e_x^B\left(p_x, p_y, \varpi_x^B, \varpi_y^B\right) &= \frac{p_x\varpi_x^B + p_y\varpi_y^B}{p_x + p_y} - \varpi_x^B = \frac{10p_x}{p_x + p_y} - 10 \\ e_y^B\left(p_x, p_y, \varpi_x^B, \varpi_y^B\right) &= \frac{p_x\varpi_x^B + p_y\varpi_y^B}{p_x + p_y} - \varpi_y^B = \frac{10p_x}{p_x + p_y} \end{aligned}$$

On recherche les prix qui équilibrent le marché du bien x :

$$e_x^A + e_x^B = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{10p_x + 10p_y}{p_x} - 10 + \frac{10p_x}{p_x + p_y} - 10 = 0$$

On pose $p_x = 1$. Il vient :

$$5\left(1 + p_y\right) + \frac{10}{1 + p_y} = 20 \Leftrightarrow 5\left(1 + p_y\right)^2 + 10 = 20\left(1 + p_y\right) \Leftrightarrow \left(1 + p_y\right)^2 + 2 = 4\left(1 + p_y\right)$$

[2] Voir TD1 pour le détail des calculs.
[3] Voir TD1 pour le détail des calculs.

$$\Leftrightarrow 1+2p_y+p_y^2+2=4+4p_y \Leftrightarrow p_y^2-2p_y-1=0$$

On cherche les racines de ce polynôme :

$$\Delta = 4+4=8$$

$$\begin{aligned} p_{y1} &= \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} < 0 \\ p_{y2} &= \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \simeq 2,41 \end{aligned}$$

Résolution alternative :

$$\begin{aligned} (1+p_y)^2+2 &= 4(1+p_y) \Leftrightarrow (1+p_y)^2-4(1+p_y)+4-2=0 \\ \Leftrightarrow & \ (1+p_y-2)^2-2=0 \Leftrightarrow (p_y-1)^2=2 \Leftrightarrow p_y-1=\sqrt{2} \Leftrightarrow p_y=1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

4.3 Exercice 3 (7 points)

Question 1 (2 points) :

$$\begin{aligned} C &= L = \frac{16w+\pi}{p+w} \\ h &= 16-L = 16-\frac{16w+\pi}{p+w} \end{aligned}$$

Question 2 (2 points) : Fonction de profit de Robinson :

$$\begin{aligned} \pi &= pC-wh = p2\sqrt{h}-wh = 2p\sqrt{h}-wh \\ \frac{d\pi}{dh} &= 0 \Leftrightarrow \frac{2p}{2\sqrt{h}}-w=0 \Leftrightarrow \frac{p}{\sqrt{h}}=w \Leftrightarrow \frac{p}{w}=\sqrt{h} \Leftrightarrow h=\frac{p^2}{w^2} \quad \text{(demande de travail)} \end{aligned}$$

Offre de bien :

$$C = 2\sqrt{h} = 2\frac{p}{w}$$

Profit :

$$\pi = pC-wh = p2\frac{p}{w}-w\frac{p^2}{w^2} = 2\frac{p^2}{w}-\frac{p^2}{w} = \frac{p^2}{w}$$

Question 3 (3 points) : Condition d'équilibre sur le marché du bien :

$$2\frac{p}{w} = \frac{16w+\pi}{p+w} \Leftrightarrow 2\frac{p}{w} = \frac{16w+\frac{p^2}{w}}{p+w}$$

Condition d'équilibre sur le marché du travail :

$$16-\frac{16w+\pi}{p+w} = \frac{p^2}{w^2}$$

On choisit de rechercher les prix équilibrant le marché des biens et on pose $w = 1$. Il vient :

$$2p = \frac{16 + p^2}{1 + p} \Leftrightarrow 2p\,(1 + p) = 16 + p^2 \Leftrightarrow 2p + 2p^2 = 16 + p^2 \Leftrightarrow p^2 + 2p - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 2p + 1 - 17 = 0 \Leftrightarrow (p + 1)^2 = 17 \Leftrightarrow p + 1 = \sqrt{17} \Leftrightarrow p = \sqrt{17} - 1 \simeq 3,12$$