L2 Economie - micro-économie 2 - Examen 1
Durée 2 heures

3 mars 2014

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Exercice 1 (8 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \ln x_A + \ln y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \ln x_B + \ln y_B$.

Question 1 (3 points) : Calculer l'équation de la courbe des contrats. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (3 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 8, \omega_y^A = 8\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 12, \omega_y^B = 2\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

Question 3 (2 points) : L'Etat souhaite que les agents consomment : $\left(x^A = 10, y^A = 5\right)$ pour l'agent A et $\left(x^B = 10, y^B = 5\right)$ pour l'agent B. Comment doit-il procéder ?

2 Exercice 2 (6 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \sqrt{x_A} + \sqrt{y_A}$.

Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \min(x_B, y_B)$.

Question 1 (2 points) : Donner la définition de la courbe des contrats. Calculer son équation. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 10\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 0\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

3 Exercice 3 (7 points)

Robinson Crusoë est seul sur son île. Chaque jour, il dispose de 16 heures (hors sommeil) à répartir entre le travail et le loisir. Le travail permet de trouver de la nourriture dans l'intérieur de l'île. La fonction de production est : $F(h) = \sqrt{4h}$ où h est le nombre d'heures travaillées. La fonction d'utilité de Robinson est $U(C, L) = \sqrt{C} + \sqrt{L}$, où C est la quantité de nourriture consommée et L le nombre d'heures de loisir que Robinson s'est octroyé.

Question 1 (2 points) : Déterminer la fonction de demande de nourriture et la fonction d'offre de travail de Robinson-consommateur. On note p le prix unitaire de la nourriture et w le taux de salaire horaire.

Question 2 (2 points) : Déterminer la fonction d'offre de bien et la fonction de demande de travail de Robinson-producteur.

Question 3 (3 points) : Déterminer les prix p et w qui permettent d'équilibrer les deux marchés. Déterminer le panier de consommation de Robinson.

4 Correction (éléments de)

4.1 Exercice 1 (8 points)

Question 1 (3 points) : Si les optima de Pareto sont situés à l'intérieur de la boîte (et les préférences étant de type Cobb-Douglas pour les deux individus, cela va être le cas), les optima de Pareto sont caractérisés par l'égalité des Tms des deux individus.

$$Tms_A\left(x_A, y_A\right) = Tms_B\left(x_B, y_B\right) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x_A}}{\frac{1}{y_A}} = \frac{\frac{1}{x_B}}{\frac{1}{y_B}} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

On a, en outre :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow x_B = 20 - x_A \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A \end{aligned}$$

En combinant ces trois relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{y_A}{x_A} &= \frac{10 - y_A}{20 - x_A} \Leftrightarrow \left(20 - x_A\right) y_A = x_A\left(10 - y_A\right) \Leftrightarrow 20y_A - x_A y_A = 10x_A - x_A y_A \\ &\Leftrightarrow 20y_A = 10x_A \Leftrightarrow y_A = \frac{1}{2}x_A \end{aligned}$$

Question 2 (3 points) : On recherche les fonctions de demande brutes de l'individu A :

$$Tms_A\left(x_A, y_A\right) = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow p_y y_A = p_x x_A$$

L'individu doit aussi respecter sa contrainte budgétaire :

$$p_x x_A + p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A$$

En combinant les deux, on obtient :

$$2p_x x_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \Leftrightarrow p_x x_A = \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{2} \Leftrightarrow x_A = \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{2p_x} \Leftrightarrow x_A = \frac{8p_x + 8p_y}{2p_x} \Leftrightarrow x_A = 4 + 4\frac{p_y}{p_x}$$

et

$$p_y y_A = \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{2} \Leftrightarrow y_A = \frac{8p_x + 8p_y}{2p_y} \Leftrightarrow y_A = 4\frac{p_x}{p_y} + 4$$

On a de même :

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B}{2p_x} = \frac{12p_x + 2p_y}{2p_x} = 6 + \frac{p_y}{p_x} \\ y_B &= \frac{p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B}{2p_y} = \frac{12p_x + 2p_y}{2p_y} = 6\frac{p_x}{p_y} + 1 \end{aligned}$$

Les conditions d'équilibre sur les deux marchés sont :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow 4 + 4\frac{p_y}{p_x} + 6 + \frac{p_y}{p_x} = 20 \Leftrightarrow 5\frac{p_y}{p_x} = 10 \Leftrightarrow \frac{p_y}{p_x} = 2 \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow 4\frac{p_x}{p_y} + 4 + 6\frac{p_x}{p_y} + 1 = 10 \Leftrightarrow 10\frac{p_x}{p_y} = 5 \Leftrightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On pose $p_x = 1$. Ce qui donne $p_y = 2$. En remplaçant dans les fonctions de demande, on obtient :

$$\begin{array}{cc} x_A = 4 + 4\frac{p_y}{p_x} = 12 & x_B = 6 + \frac{p_y}{p_x} = 6 + 2 = 8 \\ y_A = 4\frac{p_x}{p_y} + 4 = 6 & y_B = 6\frac{p_x}{p_y} + 1 = 6\frac{1}{2} + 1 = 4 \end{array}$$

Question 3 (2 points) : Si l'allocation souhaitée est un optimum de Pareto, l'Etat va pouvoir l'obtenir comme un équilibre concurrentiel (les préférences des deux individus étant strictement convexes).

Il s'agit d'un optimum de Pareto si $y_A = \frac{1}{2}x_A$ (cf. question 1). C'est bien le cas.

Au point d'équilibre, on doit avoir :

$$Tms_A(x_A, y_A) = Tms_B(x_B, y_B) = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{6}{12} = \frac{4}{8} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2}$$

Pour obtenir l'allocation souhaitée, l'Etat doit déplacer la dotation initiale et la placer sur la droite de pente $-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{1}{2}$ passant par $\left(x^A = 10, y^A = 5\right)$.

4.2 Exercice 2 (6 points)

Question 1 (2 points) : La courbe des contrats doit vérifier $x_B = y_B$.

Question 2 (4 points) : On recherche les fonctions de demande brutes de l'individu A :

$$Tms_A(x_A, y_A) = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_A}}}{\frac{1}{2\sqrt{y_A}}} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y_A}}{\sqrt{x_A}} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{p_x^2}{p_y^2} \Leftrightarrow p_y y_A = \frac{p_x}{p_y} p_x x_A$$

L'individu doit aussi respecter sa contrainte budgétaire :

$$p_x x_A + p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A$$

En combinant les deux, on obtient :

$$p_x x_A + \frac{p_x}{p_y} p_x x_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \Leftrightarrow \frac{p_x + p_y}{p_y} p_x x_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \Leftrightarrow x_A = \frac{p_y}{p_x} \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x + p_y}$$

et

$$p_y y_A = \frac{p_x}{p_y} p_x x_A = \frac{p_x}{p_y} p_y \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x + p_y} \Leftrightarrow y_A = \frac{p_x}{p_y} \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x + p_y}$$

On recherche les fonctions de demande brutes de l'individu B : On doit avoir $x_B = y_B$. La contrainte budgétaire de B est :

$$p_x x_B + p_y y_B = p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B$$

En combinant les deux, on obtient :

$$p_x x_B + p_y y_B = p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B \Leftrightarrow (p_x + p_y)\, x_B = p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B \Leftrightarrow x_B = \frac{p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B}{p_x + p_y}$$

Les conditions d'équilibre sur les deux marchés sont :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow \frac{p_y}{p_x}\frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x + p_y} + \frac{p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B}{p_x + p_y} = 20 \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow \frac{p_x}{p_y}\frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x + p_y} + \frac{p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B}{p_x + p_y} = 10 \end{aligned}$$

La loi de Walras implique que si on trouve des prix qui équilibrent l'un des marchés, ces prix équilibreront automatiquement l'autre marché.

On choisit de conserver le marché du bien y :

$$\frac{p_x}{p_y}\frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x + p_y} + \frac{p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B}{p_x + p_y} = 10 \Leftrightarrow p_x \left(p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A\right) + p_y \left(p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B\right) = 10 p_y \left(p_x + p_y\right)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad p_x\left(10p_x + 10p_y\right) + p_y\left(10p_x + 0p_y\right) = 10p_y\left(p_x + p_y\right) \Leftrightarrow 10p_x^2 + 10p_x p_y = 10p_y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad p_x^2 + p_x p_y = p_y^2 \end{aligned}$$

On pose $p_y = 1$. La condition précédente devient :

$$p_x^2 + p_x - 1 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$$

et les racines :

$$\begin{aligned} p_{x1} &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \\ p_{x2} &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 0,618 \end{aligned}$$

4.3 Exercice 3 (7 points)

Question 1 (2 points) :

$$Tms\left(C,L\right)=\frac{w}{p}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2\sqrt{L}}}{\frac{1}{2\sqrt{C}}}=\frac{w}{p}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}=\frac{w}{p}\Leftrightarrow\frac{C}{L}=\frac{w^2}{p^2}\Leftrightarrow pC=\frac{w}{p}wL$$

Contrainte budgétaire :

$$pC+wL=w\overline{L}+\pi$$

En combinant les deux, on obtient :

$$pC+wL=w\overline{L}+\pi\Leftrightarrow\frac{w}{p}wL+wL=w\overline{L}+\pi\Leftrightarrow\frac{w+p}{p}wL=w\overline{L}+\pi\Leftrightarrow L=\frac{p}{w}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p}$$

et

$$pC=\frac{w}{p}wL\Leftrightarrow pC=\frac{w}{p}w\frac{p}{w}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p}\Leftrightarrow C=\frac{w}{p}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p}$$

L'offre de travail est donc égale à :

$$h=\overline{L}-L=\overline{L}-\frac{p}{w}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p}$$

Question 2 (2 points) : Fonction de profit de Robinson :

$$\begin{aligned}\pi &= pC-wh=p\sqrt{4h}-wh=2p\sqrt{h}-wh\\ \frac{d\pi}{dh} &= 0\Leftrightarrow\frac{2p}{2\sqrt{h}}-w=0\Leftrightarrow\frac{p}{\sqrt{h}}=w\Leftrightarrow\frac{p}{w}=\sqrt{h}\Leftrightarrow h=\frac{p^2}{w^2}\quad\text{(demande de travail)}\end{aligned}$$

Offre de bien :

$$C=\sqrt{4h}=2\frac{p}{w}$$

Profit :

$$\pi=pC-wh=p2\frac{p}{w}-w\frac{p^2}{w^2}=2\frac{p^2}{w}-\frac{p^2}{w}=\frac{p^2}{w}$$

Question 3 (3 points) : Déterminer les prix p et w qui permettent d'équilibrer les deux marchés. Déterminer le panier de consommation de Robinson.

Condition d'équilibre sur le marché du bien :

$$2\frac{p}{w}=\frac{w}{p}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p}$$

Condition d'équilibre sur le marché du travail :

$$\overline{L}-\frac{p}{w}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p}=\frac{p^2}{w^2}$$

On choisit de rechercher les prix équilibrant le marché des biens :

$$\begin{aligned} 2\frac{p}{w} &= \frac{w}{p}\frac{w\overline{L}+\pi}{w+p} \Leftrightarrow 2p^2\left(w+p\right) = w^2\left(16w+\frac{p^2}{w}\right) \Leftrightarrow 2p^2w+2p^3 = 16w^3+p^2w \\ &\Leftrightarrow p^2w+2p^3 = 16w^3 \end{aligned}$$

On pose $w = 1$. On obtient :

$$2p^3 + p^2 - 16 = 0$$

On recherche la solution numériquement. On obtient : $p \simeq 1,846$.