L2 Economie - micro-économie 2 - Examen 1
Durée 2 heures

25 mars 2013

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Exercice 1 (8 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \sqrt{x_A} + y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = x_B + \sqrt{y_B}$.

Question 1 (3 points) : Donner la définition de la courbe des contrats. Calculer son équation. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 10\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 0\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

Question 3 (1 point) : Proposer un test simple et rapide qui permet de détecter certaines erreurs de calcul[1]. Le mettre en application.

2 Exercice 2 (14 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

[1] Autre que régarder sur la copie du voisin !

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = \sqrt{x_A} + y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \sqrt{x_B} + y_B$.

Question 1 (3 points) : Calculer l'équation de la courbe des contrats. Représenter cette courbe graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 8, \omega_y^A = 8\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 12, \omega_y^B = 2\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

Question 3 (3 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 2, \omega_y^A = 1\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 18, \omega_y^B = 9\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

Question 4 (1 point) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 8\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 2\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

Question 5 (3 points) : L'Etat souhaite que les agents consomment : $\left(x^A = 10, y^A = 5\right)$ pour l'agent A et $\left(x^B = 10, y^B = 5\right)$ pour l'agent B. Comment doit-il procéder ?

3 Correction (éléments de)

3.1 Exercice 1 (8 points)

Question 1 (3 points) :

Les allocations se trouvant sur la courbe des contrats et à l'intérieur de la boîte sont celles pour lesquelles :

$$TMS_A = TMS_B \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_A}}}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y_B}}} \Leftrightarrow 1 = 4\sqrt{x_A}\sqrt{y_B}$$

Les allocations doivent aussi être réalisables :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow x_B = 20 - x_A \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A \end{aligned}$$

On a donc :

$$1 = 4\sqrt{x_A}\sqrt{y_B} \Leftrightarrow 1 = 4\sqrt{x_A}\sqrt{10 - y_A} \Leftrightarrow 1 = 16x_A\left(10 - y_A\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}\frac{1}{x_A} = 10 - y_A \Leftrightarrow y_A = 10 - \frac{1}{16x_A}$$

L'équation de la courbe des contrats est :

$$y_A = 10 - \frac{1}{16x_A}$$

On s'aperçoit que si x_A est très proche de 0, la formule de y_A donne des valeurs négatives. Dans cette zone, la courbe des contrats est confondue avec l'axe $y_A = 0$. Lorsque $x_A = 20$, la formule donne $y_A \simeq 9,997$. Une partie de la courbe des contrats est confondue avec l'axe $x_B = 0$. Plus précisément, les allocations vérifiant $x_A = 20$ et $y_A > 9,997$ sont sur la courbe des contrats.

Question 2 (4 points) : Les fonctions d'utilité des agents sont des fonctions quasi-linéaires. On a vu, en première année, que les fonctions de demandes brutes associées à ce type de fonctions d'utilité comprennent deux parties. Une partie correspond à une solution intérieure (l'agent consomme des quantités strictement positives des deux biens). L'autre partie correspond à une solution en coin (dans laquelle l'individu ne consomme qu'un seul des deux biens).

On sait (théorême 1 de l'économie du bien-être) que l'équilibre concurrentiel que l'on cherche se trouve sur la courbe des contrats. Hormis les deux zones extrêmes, cette courbe est située à l'intérieur de la boîte. Vu la position du point de dotations initiales, on cherche un équilibre dans lequel chacun des deux agents consomme un peu des deux biens.

On calcule les demandes brutes de l'agent A, en ne s'intéressant qu'aux cas où la solution est intérieure. On a :

$$\left\{ \begin{array}{c} Tms_A = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{x_A}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = 10p_x + 10p_y \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{p_y}{2p_x} = \sqrt{x_A} \\ p_y y_A = 10p_x + 10p_y - p_x x_A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_x x_A = \frac{p_y}{4p_x} p_y \\ p_y y_A = 10p_x + 10p_y - \frac{p_y}{4p_x} p_y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_A = \frac{1}{4} \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \\ y_A = 10\frac{p_x}{p_y} + 10 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} \end{array} \right\}$$

On calcule les demandes brutes de l'agent B, en se restreignant aux cas où la solution est intérieure. On a :

$$\left\{ \begin{array}{c} Tms_B = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\sqrt{y_B} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = 10p_x \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = \frac{1}{4} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \\ p_x x_B = 10p_x - p_y y_B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = \frac{1}{4} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \\ p_x x_B = 10p_x - \frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y} p_x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = \frac{1}{4} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \\ x_B = 10 - \frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y} \end{array} \right\}$$

L'équilibre concurrentiel est déterminé par :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_A + x_B = 20 \\ y_A + y_B = 10 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4} \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 + 10 - \frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y} = 20 \\ 10\frac{p_x}{p_y} + 10 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} + \frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 = 10 \end{array} \right\}$$

La loi de Walras implique que, si on trouve un couple de prix équilibrant l'un des marchés, il équilibre aussi l'autre marché.

On choisit le marché du bien y. On pose $p_y = 1$. Il vient :

$$10\frac{p_x}{p_y} + 10 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} + \frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 = 10 \Leftrightarrow 10p_x - \frac{1}{4}\frac{1}{p_x} + \frac{1}{4}p_x^2 = 0 \Leftrightarrow 40p_x^2 - 1 + p_x^3 = 0$$

On cherche une solution numérique. On obtient $p_x = 0,158$ est solution. Si on pose $p_x = 1$, on obtient : $p_y = \frac{1}{0{,}158} \simeq 6,329$.

A l'équilibre, on doit donc avoir : $p_x/p_y = 0,158$. On en déduit :

$$\begin{array}{ll} x_A = \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \simeq 10,01 & x_B = 10 - \frac{1}{4}\frac{p_x}{p_y} \simeq 9,96 \\ y_A = 10\frac{p_x}{p_y} + 10 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} \simeq 9,9977 & y_B = \frac{1}{4}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \simeq 0,006 \end{array}$$

Question 3 (1 point) : L'équilibre que l'on a trouvé doit se trouver sur la courbe des contrats (Théorême 1). On doit donc avoir :

$$y_A = 10 - \frac{1}{16x_A} \Leftrightarrow 9,9977 = 10 - \frac{1}{16 \times 10,01} \Leftrightarrow 9,9977 = 9,9938$$

C'est ok ! (aux arrondis près).

3.2 Exercice 2 (14 points)

Question 1 (3 points) : Si des points à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth sont des optima de Pareto, ils doivent vérifier :

$$\begin{aligned} Tms_A &= Tms_B \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_A}} = \frac{1}{2\sqrt{x_B}} \Leftrightarrow \sqrt{x_B} = \sqrt{x_A} \Leftrightarrow x_B = x_A \\ &\Leftrightarrow 20 - x_A = x_A \Leftrightarrow 2x_A = 20 \Leftrightarrow x_A = 10 \end{aligned}$$

Il peut aussi exister des points sur les bords de la boîte.

Si $x_A < 10$, on a $Tms_A > Tms_B$. Les agents ont intérêt à réaliser des échanges. A doit donner du bien y à B en échange de bien x. Ce type d'échange n'est cependant pas possible si $y_A = 0$. Donc, les points tels que $x_A < 10$ et $y_A = 0$ appartiennent aussi à la courbe des contrats.

Si $x_A > 10$, on a $Tms_A < Tms_B$. Les agents ont intérêt à réaliser des échanges. A doit donner du bien x à B en échange de bien y. Ce type d'échange n'est cependant pas possible si $y_B = 0$. Donc, les points tels que $x_A > 10$ et $y_A = 10$ appartiennent aussi à la courbe des contrats.

Question 2 (4 points) : L'équilibre doit nécessairement être sur la courbe des contrats.

Il ne peut pas être dans la partie où $x_A > 10$ et $y_A = 10$, car, pour atteindre cette partie, B devrait donner des quantités positives des deux biens à A, ce qu'il n'acceptera jamais de faire.

Cela ne laisse que 2 possibilités. Si on place le point de dotations initiales sur le graphique de la question 1, la partie intérieure de la courbe des contrats semble la plus proche. On va donc commencer par supposer que l'équilibre est dans cette partie (cela paraît l'hypothèse la plus plausible).

Si l'équilibre est intérieur, on doit avoir $x_A = x_B = 10$ et les Tms des agents sont égaux à $\frac{1}{2\sqrt{10}}$. Or, dans un équilibre concurrentiel (intérieur), on doit avoir $Tms = \frac{p_x}{p_y}$. Si l'équilibre est à l'intérieur de la boîte, on doit donc avoir $\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$. On normalise $p_x = 1$, on doit avoir $p_y = 2\sqrt{10}$.

On a calculé les demandes brutes des agents pour ce type de préférences dans l'exercice 1 :

$$\left\{ \begin{array}{c} Tms_A = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{x_A}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{p_y}{2p_x} = \sqrt{x_A} \\ p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A - p_x x_A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_x x_A = \frac{p_y}{4p_x} p_y \\ p_y y_A = p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A - \frac{p_y}{4p_x} p_y \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_A = \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \\ y_A = \frac{p_x}{p_y}\omega_x^A + \omega_y^A - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_A = \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \\ y_A = 8\frac{p_x}{p_y} + 8 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On remplace les prix par les prix d'équilibre :

$$\begin{gathered}x_A = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{p_y}{p_x}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2\sqrt{10}}{1}\right)^2 = 10 \\ y_A = 8\tfrac{p_x}{p_y} + 8 - \tfrac{1}{4}\tfrac{p_y}{p_x} = 8\tfrac{1}{2\sqrt{10}} + 8 - \tfrac{1}{4}\tfrac{2\sqrt{10}}{1} = \tfrac{4}{\sqrt{10}} + 8 - \tfrac{\sqrt{10}}{2} \simeq 7,68\end{gathered}$$

Pour l'agent B, on a :

$$\begin{gathered}x_B = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{p_y}{p_x}\right)^2 = 10 \\ y_B = 12\tfrac{p_x}{p_y} + 2 - \tfrac{1}{4}\tfrac{p_y}{p_x} = 12\tfrac{1}{2\sqrt{10}} + 2 - \tfrac{1}{4}\tfrac{2\sqrt{10}}{1} = \tfrac{6}{\sqrt{10}} + 2 - \tfrac{\sqrt{10}}{2} \simeq 2,32\end{gathered}$$

Tout est cohérent. Cette situation est bien un équilibre.

On va vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre dans la dernière partie de la courbe des contrats. S'il existait un équilibre dans cette partie, on devrait avoir $y_A = 0$ et $y_B = 10$. Pour B, sa consommation optimale est une solution intérieure et les formules précédentes s'appliquent. Mais, pour A, c'est une solution en coin. Il va falloir modifier les formules.

$$y_B = 10 \Leftrightarrow 12\frac{p_x}{p_y} + 2 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} = 10 \Leftrightarrow 12\frac{p_x}{p_y} - 8 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} = 0$$

On note $z = \frac{p_x}{p_y}$. On doit donc résoudre :

$$12z - 8 - \frac{1}{4}\frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow 12z^2 - 8z - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 48z^2 - 32z - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 32^2 + 4 \times 48 = 1216 = (4 \times 4 \times 2)^2 + 4 \times 4 \times 4 \times 3 = 4 \times 4 \times 4 \times \left[4 \times 2^2 + 3\right] = 8^2 \times 19$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 0 \\ z_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{32 + 8\sqrt{19}}{2 \times 32} = \frac{4 + \sqrt{19}}{8} \end{aligned}$$

Le rapport des prix à l'équilibre doit donc être $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\sqrt{19}+4}{8}$.

Pour l'agent A, si la solution est en coin, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{gathered} x_A = \frac{p_x\omega_x^A + p_y\omega_y^A}{p_x} = \frac{8p_x + 8p_y}{p_x} = 8 + 8\frac{p_y}{p_x} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \\ y_A = 0 \end{gathered} \right\}$$

Avec $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\sqrt{19}+4}{8}$, on a :

$$x_A = 8 + 8\frac{p_y}{p_x} = 8 + 8\frac{8}{\sqrt{19}+4} = 8 + \frac{64}{\sqrt{19}+4} \simeq 15,657$$

Mais on devait avoir $x_A \leq 10$. Cela ne fonctionne pas. Cool ! Ce n'est pas un équilibre.

Question 3 (3 points) : L'équilibre doit être sur la courbe des contrats et il ne peut pas se trouver dans la partie telle que $x_A > 10$ et $y_A = 10$ (pour les mêmes raisons qu'à la question précédente).

La partie de la courbe des contrats la plus proche est celle située sur l'axe horizontal. En outre, si l'équilibre est dans la boîte, la question est identique à la précédente, ce qui ne serait pas très fun[2]. On commence donc par faire l'hypothèse que l'équilibre est dans la zone de la courbe des contrats telle que $x_A < 10$ et $y_A = 0$ et on regarde si cela conduit à des résultats cohérents ou à des choses impossibles.

S'il existait un équilibre dans cette partie, on devrait avoir $y_A = 0$ et $y_B = 10$.

$$y_B = 10 \Leftrightarrow 18\frac{p_x}{p_y} + 9 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} = 10 \Leftrightarrow 18\frac{p_x}{p_y} - 1 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} = 0$$

On note $z = \frac{p_x}{p_y}$. On doit donc résoudre :

$$18z - 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow 18z^2 - z - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 72z^2 - 4z - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 + 4 \times 72 = 1216 = 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 2 \times 9 = 4^2 \times [1 + 18] = 4^2 \times 19$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 4\sqrt{19}}{2a} < 0 \\ z_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 4\sqrt{19}}{2 \times 72} = \frac{\sqrt{19} + 1}{36} \end{aligned}$$

Le rapport des prix à l'équilibre doit donc être $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\sqrt{19}+1}{36}$.

Pour l'agent A, si la solution est en coin, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_A = \frac{p_x \omega_x^A + p_y \omega_y^A}{p_x} = \frac{2p_x + p_y}{p_x} = 2 + \frac{p_y}{p_x} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \\ y_A = 0 \end{array} \right\}$$

Avec $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\sqrt{19}+1}{36}$, on a :

$$\begin{aligned} x_A &= 2 + \frac{36}{\sqrt{19} + 1} \simeq 8,718 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{36}{\sqrt{19} + 1}\right)^2 \simeq 11,28 \end{aligned}$$

On devait avoir $x_A \leq 10$. Tout semble cohérent.

On vérifie :

$$x_B = \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \simeq 11,28$$

[2] Selon les critères habituels de l'enseignant de microéconomie.

On a bien : $x_A + x_B = 20$ (à l'arrondi près). Tout est cohérent. C'est bien un équilibre !

On peut vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre intérieur. Si l'équilibre est intérieur, on doit avoir $x_A = x_B = 10$ et les Tms des agents sont égaux à $\frac{1}{2\sqrt{10}}$. Or, dans un équilibre concurrentiel (intérieur), on doit avoir $Tms = \frac{p_x}{p_y}$. Si l'équilibre est à l'intérieur de la boîte, on doit donc avoir $\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$. On normalise $p_x = 1$, on doit avoir $p_y = 2\sqrt{10}$.

On remplace dans les fonctions de demandes brutes des agents :

$$x_A = \frac{1}{4}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{10}}{1}\right)^2 = 10$$
$$y_A = 2\frac{p_x}{p_y} + 1 - \frac{1}{4}\frac{p_y}{p_x} = 2\frac{1}{2\sqrt{10}} + 1 - \frac{1}{4}\frac{2\sqrt{10}}{1} = \frac{1}{\sqrt{10}} + 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \simeq -0,26$$

y_A est négatif. On arrive bien à quelquechose d'impossible. L'équilibre n'est pas à l'intérieur de la boîte.

Question 4 (1 point) : On se trouve sur la courbe des contrats à l'intérieur de la boîte. Donc, le point de dotations initiales est l'équilibre concurrentiel. On a $\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$ et il n'y a pas d'échanges.

Question 5 (3 points) : On commence par vérifier que ce point est sur la courbe des contrats. On a $x^A = 10$. C'est bien le cas. Ce point est un optimum de Pareto. Les préférences des deux agents sont convexes, il est possible d'appliquer le second théorème de l'économie du bien-être. Le point que l'on cherche à atteindre peut être obtenu comme un équilibre concurrentiel si on place le point de dotations initiales sur une droite passant par $(x^A = 10, y^A = 5)$ et ayant une pente égale à $Tms_A = -\frac{1}{2\sqrt{10}} = -\frac{p_x}{p_y}$.