L2 Economie - micro-économie 2 - Examen 1
Durée 2 heures

5 mars 2012

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction et de la calligraphie**.

1 Exercice 1 (7 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = x_A + 2y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \min(2x_B, y_B)$.

Question 1 (3 points) : Donner la définition de la courbe des contrats. Représenter la graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 2 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 10\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 0\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

2 Exercice 2 (7 points)

On considère une économie sans production avec 2 consommateurs (A et B) et 2 biens (x et y). Les dotations totales de l'économie pour les deux biens sont de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y.

Les préférences de l'agent A sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_A(x_A, y_A) = x_A y_A$. Les préférences de l'agent B sont données par la fonction d'utilité suivante : $U_B(x_B, y_B) = \sqrt{x_B} + \sqrt{y_B}$.

Question 3 (3 points) : Calculer la courbe des contrats. Représenter la graphiquement dans la boîte d'Edgeworth.

Question 4 (4 points) : On suppose que les dotations initiales des agents sont les suivantes : $\left(\omega_x^A = 10, \omega_y^A = 6\right)$ pour l'agent A et $\left(\omega_x^B = 10, \omega_y^B = 4\right)$ pour l'agent B. Calculer l'équilibre concurrentiel.

3 Question de réflexion (6 points)

Question 5 (6 points) : Les étudiants boursiers devraient-ils bénéficier d'un tarif plus faible au restaurant universitaire ?

4 Correction

4.1 Exercice 1 (7 points)

Question 1 (3 points) : Le TMS de l'agent A est égal à $\frac{1}{2}$. Ce qui signifie que l'agent A est indifférent entre 1 unité de bien x et une demi-unité de bien y.

L'agent B a des préférences de type "compléments parfaits". Il associe toujours 2 unités de bien y à une unité de bien x.

La courbe des contrats correspond à la droite d'équation : $y_B = 2x_B$.

Question 2 (4 points) : L'équilibre concurrentiel doit se trouver sur la courbe des contrats. S'il est à l'intérieur de la boite, il doit vérifier $y_B = 2x_B$ et $TMS_A = \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2}$.

On va calculer les demandes excédentaires de l'agent B pour $\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2}$.

On commence par calculer les demandes brutes de l'agent B :

$$\left\{ \begin{array}{c} y_B = 2x_B \\ p_x x_B + p_y y_B = p_x \omega_x^B + p_y \omega_y^B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = 2x_B \\ p_x x_B + 2p_y x_B = 10p_x \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = 2\frac{10p_x}{p_x+2p_y} \\ x_B = \frac{10p_x}{p_x+2p_y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_B = \frac{20p_x}{p_x+2p_y} \\ x_B = \frac{10p_x}{p_x+2p_y} \end{array} \right\}$$

On posant $p_x = 1$ et $p_y = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{10p_x}{p_x + 2p_y} = \frac{10}{1 + 2 \times 2} = 2 \\ y_B &= \frac{20p_x}{p_x + 2p_y} = \frac{20}{5} = 4 \end{aligned}$$

L'agent B souhaite vendre 8 unités de bien x et acheter 4 unités de bien y. L'agent A est d'accord pour réaliser cet échange. Les prix $p_x = 1$ et $p_y = 2$ forment bien un équilibre.

4.2 Exercice 2 (7 points)

Question 3 (3 points) : Les allocations se trouvant sur la courbe des contrats sont celles pour lesquelles :

$$TMS_A = TMS_B \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_B}}}{\frac{1}{2\sqrt{y_B}}} \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{\sqrt{y_B}}{\sqrt{x_B}} \Leftrightarrow \frac{y_A^2}{x_A^2} = \frac{y_B}{x_B}$$

Les allocations doivent aussi être réalisables :

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 20 \Leftrightarrow x_B = 20 - x_A \\ y_A + y_B &= 10 \Leftrightarrow y_B = 10 - y_A \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{y_A^2}{x_A^2} = \frac{y_B}{x_B} \Leftrightarrow \frac{y_A^2}{x_A^2} = \frac{10 - y_A}{20 - x_A} \Leftrightarrow (20 - x_A)\, y_A^2 = (10 - y_A)\, x_A^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 20y_A^2 - x_A y_A^2 = 10x_A^2 - y_A x_A^2 \Leftrightarrow 20y_A^2 - x_A y_A^2 + y_A x_A^2 = 10x_A^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (20 - x_A)\, y_A^2 + x_A^2 y_A - 10x_A^2 = 0 \end{aligned}$$

C'est un polynôme du second degré, on cherche ses racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = x_A^2 x_A^2 + 4\,(20 - x_A) \times 10x_A^2 = x_A^2 \left(x_A^2 - 40x_A + 800\right)$$

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-x_A^2 - \sqrt{x_A^2\,(x_A^2 - 40x_A + 800)}}{2\,(20 - x_A)} < 0 \\ y_A &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-x_A^2 + \sqrt{x_A^2\,(x_A^2 - 40x_A + 800)}}{2\,(20 - x_A)} = \frac{x_A \left(\sqrt{x_A^2 - 40x_A + 800} - x_A\right)}{40 - 2x_A} > 0 \end{aligned}$$

L'équation de la courbe des contrats est :

$$y_A = \frac{x_A \left(\sqrt{x_A^2 - 40x_A + 800} - x_A\right)}{40 - 2x_A}$$

On calcule les coordonnées de quelques points pour la tracer :

x_A	0	1	2	5	8	10	12	15	18	20
y_A	0	0,7	1,38	3,33	5,11	6,18	7,16	8,42	9,45	10

Question 4 (4 points) : Demandes excédentaires de A[1] :

$$\begin{aligned} e_x^A\left(p_x, p_y, \varpi_x^A, \varpi_y^A\right) &= \frac{a}{a+b}\frac{p_x \varpi_x^A + p_y \varpi_y^A}{p_x} - \varpi_x^A = \frac{1}{2}\frac{10p_x + 6p_y}{p_x} - 10 \\ e_y^A\left(p_x, p_y, \varpi_x^A, \varpi_y^A\right) &= \frac{b}{a+b}\frac{p_x \varpi_x^A + p_y \varpi_y^A}{p_y} - \varpi_y^A = \frac{1}{2}\frac{10p_x + 6p_y}{p_y} - 6 \end{aligned}$$

[1] Voir TD1 pour le détail des calculs.

Demandes excédentaires de B[2] :

$$\begin{aligned} e_x^B\left(p_x, p_y, \varpi_x^B, \varpi_y^B\right) &= \frac{p_y}{p_x}\frac{1}{p_x+p_y}\left(p_x\varpi_x^B + p_y\varpi_y^B\right) - \varpi_x^B = \frac{p_y}{p_x}\frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y} - 10 \\ e_y^B\left(p_x, p_y, \varpi_x^B, \varpi_y^B\right) &= \frac{p_x}{p_y}\frac{1}{p_x+p_y}\left(p_x\varpi_x^B + p_y\varpi_y^B\right) - \varpi_y^B = \frac{p_x}{p_y}\frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y} - 4 \end{aligned}$$

On recherche les prix permettant d'équilibrer le marché du bien x :

$$e_x^A + e_x^B = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{10p_x+6p_y}{p_x} - 10 + \frac{p_y}{p_x}\frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y} - 10 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{10p_x+6p_y}{p_x} + \frac{p_y}{p_x}\frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y} = 20 \Leftrightarrow 5p_x + 3p_y + \frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y}p_y = 20p_x \\ &\Leftrightarrow \frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y}p_y = 15p_x - 3p_y \Leftrightarrow \left(10p_x+4p_y\right)p_y = \left(15p_x - 3p_y\right)\left(p_x+p_y\right) \\ &\Leftrightarrow 10p_xp_y + 4p_y^2 = 15p_x^2 - 3p_xp_y + 15p_xp_y - 3p_y^2 \Leftrightarrow 7p_y^2 = 15p_x^2 + 2p_xp_y \end{aligned}$$

On pose $p_x = 1$. Il vient :

$$7p_y^2 = 15 + 2p_y \Leftrightarrow 7p_y^2 - 2p_y - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 420 = 424 = 8^2$$

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{106}}{14} < 0 \\ p_y &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{106}}{14} = \frac{1+\sqrt{106}}{7} \simeq 1,6137 \end{aligned}$$

Les prix d'équilibre sont tels que :

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{7}{1+\sqrt{106}}$$

$$\begin{aligned} e_x^A &= \frac{1}{2}\frac{10p_x+6p_y}{p_x} - 10 = \frac{1}{2}\frac{10+6\times 1,6137}{1} - 10 = -0,158 \\ e_y^A &= \frac{1}{2}\frac{10p_x+6p_y}{p_y} - 6 = \frac{1}{2}\frac{10+6\times 1,6137}{1,6137} - 6 = 0,098 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_x^B &= \frac{p_y}{p_x}\frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y} - 10 = 1,6137 \times \frac{10+4\times 1,6137}{1+1,6137} - 10 = 0,158 \\ e_y^B &= \frac{p_x}{p_y}\frac{10p_x+4p_y}{p_x+p_y} - 4 = \frac{1}{1,6137}\frac{10+4\times 1,6137}{1+1,6137} - 4 = -0,098 \end{aligned}$$

[2] Voir TD2 pour le détail des calculs.