FACULTÉ DE DROIT ET D'ÉCONOMIE

Année Universitaire 2017-2018

L2 ÉCONOMIE-GESTION

ÉPREUVE DE MICROÉCONOMIE n°1

Durée : 2H00

Session 1 : 23 octobre 2017

Les calculatrices **non programmables** sont autorisées. Les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont strictement interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction**. **Barême non contractuel**.

1 Exercice 1 (2 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p. A court terme, la firme ne peut faire varier que la quantité de l'input 1. La quantité de l'input 2 est fixée à $\overline{x}_2 = 25$. On a $p = 10$ et $w_2 = 2,37$.

Question 1 (2 points) : On observe que la firme 1 a choisi $x_1 = 100$, quelle est la valeur de w_1 ?

2 Exercice 2 (4 points)

La production de blé d'un agriculteur est donnée par la fonction de production suivante :

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

où x_1 représente la quantité de travail et x_2 la surface des terres de l'exploitation. Initialement, l'agriculteur dispose d'un champs correspondant à une surface $\overline{x}_2 = 25$. Le champs adjacent, correspondant à une surface $\overline{x}_2 = 24$, est mis en vente. On a $p = 10$ et $w_1 = 2$.

Question 2 (4 points) : Quel est le montant maximal que l'agriculteur est prêt à payer pour acquérir le champs voisin et l'ajouter à son exploitation ?

3 Exercice 3 (6 points)

Question 3 (4 points) : Calculer la fonction de coût correspondant à la fonction de production :

$$f(l, k) = 2\sqrt{l} + 5\sqrt{k}$$

on note w et r les prix respectifs des inputs l et k.

Question 4 (2 points) : Calculer l'élasticité de substitution entre les facteurs de production.

4 Exercice 4 (4 points)

Une firme dispose de deux usines. La fonction de production de la première est égale à :

$$f_A\left(x_1^A, x_2^A\right) = 5\sqrt{x_1^A} + 2\sqrt{x_2^A}$$

La fonction de production de la seconde est égale à :

$$f_B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \min\left(\sqrt{x_1^B}, 2\sqrt{x_2^B}\right)$$

Question 5 (4 points) : Calculer la fonction de coût de la firme (on note w_1 et w_2 les prix respectifs des inputs x_1 et x_2). On pose $w_1 = 5$ et $w_2 = 4$.

5 Exercice 5 (4 points)

Largo vient d'hériter de l'entreprise W, mais il ne souhaite pas la gérer lui même. Cette entreprise produit un bien y à partir de 2 inputs, x_1 et x_2. Le prix de l'output est noté p et ceux des inputs w_1 et w_2. Largo a commandé un audit sur les deux dernières années de l'activité de l'entreprise W. Les résultats sont résumés par le tableau suivant.

	p	w_1	w_2	y	x_1	x_2
2015	10	1	1	4	3	4
2016	12	2	1	5	3	5

Question 6 (4 points) : Largo doit-il conserver le manager de la firme ou le changer ? Bien justifier la réponse.

6 Éléments de correction

6.1 Exercice 1 (2 points)

Question 1 (2 points) : A court terme, la quantité optimale de facteur 1 est déterminée par la condition :

$$pPm_1(x_1, \overline{x}_2) = w_1 \Leftrightarrow p\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = w_1 \Leftrightarrow 10\frac{1}{2\sqrt{100}} = w_1 \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{2}$$

6.2 Exercice 2 (4 points)

Question 2 (4 points) : Si l'agriculteur n'achète pas le champs, la quantité x_1 choisie est déterminée par :

$$pPm_1(x_1, \overline{x}_2) = w_1 \Leftrightarrow p\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\sqrt{\overline{x}_2} = w_1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \frac{p}{2w_1}\sqrt{\overline{x}_2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{p^2}{4w_1^2}\overline{x}_2$$

Application numérique :

$$x_1 = \frac{p^2}{4w_1^2}\overline{x}_2 = \frac{100}{16} \times 25 = 156,25$$

Le surplus de l'agriculteur est égal (pour obtenir son profit, il faudrait retirer le coût d'opportunité d'exploiter lui même son terrain. Mais, on ne le connait pas) :

$$\begin{aligned} S &= pf(x_1, x_2) - w_1x_1 = p\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} - w_1x_1 = 10\sqrt{\frac{100}{16} \times 25}\sqrt{25} - 2 \times \frac{100}{16} \times 25 \\ &= \frac{100}{4} \times 5 \times 5 - 2 \times \frac{100}{16} \times 25 = \frac{2500}{4} - \frac{2}{4} \times \frac{2500}{4} = \frac{2500}{8} = 312,5 \end{aligned}$$

Si l'agriculteur achète le champs, il choisit :

$$x_1 = \frac{p^2}{4w_1^2}\overline{x}_2 = \frac{100}{16} \times 49 = 306,25$$

et son surplus est égal à :

$$\begin{aligned} S &= pf(x_1, x_2) - w_1x_1 = p\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} - w_1x_1 = 10\sqrt{\frac{100}{16} \times 49}\sqrt{49} - 2 \times \frac{100}{16} \times 49 \\ &= \frac{100}{4} \times 49 - 2 \times \frac{100}{16} \times 49 = \frac{4900}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{4900}{4} = \frac{4900}{8} = 612,5 \end{aligned}$$

L'agriculteur est prêt à payer au maximum 300 ($= 612,5 - 312,5$) pour acquérir le champs voisin.

6.3 Exercice 3 (4 points)

Question 3 (4 points) : On commence par rechercher les demandes conditionnelles de facteurs :

$$\left\{ \begin{array}{c} |Tmst\,(l,k)| = \frac{w}{r} \\ y = 2\sqrt{l} + 5\sqrt{k} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{2}{2\sqrt{l}}}{\frac{5}{2\sqrt{k}}} = \frac{w}{r} \\ y = 2\sqrt{l} + 5\sqrt{k} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{2\sqrt{k}}{5\sqrt{l}} = \frac{w}{r} \\ y = 2\sqrt{l} + 5\sqrt{k} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{k} = \frac{5w}{2r}\sqrt{l} \\ y = 2\sqrt{l} + 5\frac{5w}{2r}\sqrt{l} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{k} = \frac{5w}{2r}\sqrt{l} \\ y = \frac{4r+25w}{2r}\sqrt{l} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{25w^2}{4r^2}l \\ \sqrt{l} = \frac{2r}{4r+25w}y \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{25w^2}{4r^2}\frac{4r^2}{(4r+25w)^2}y^2 \\ l = \frac{4r^2}{(4r+25w)^2}y^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = \frac{25w^2}{(4r+25w)^2}y^2 \\ l = \frac{4r^2}{(4r+25w)^2}y^2 \end{array} \right\}$$

On peut maintenant calculer le coût de production pour un niveau donné d'output :

$$C\,(w,r,y) = w\frac{4r^2}{(4r+25w)^2}y^2 + r\frac{25w^2}{(4r+25w)^2}y^2 = \frac{wr\,(4r+25w)}{(4r+25w)^2}y^2 = \frac{wr}{4r+25w}y^2$$

Question 4 (2 points) : Élasticité de substitution entre les facteurs de production :

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta\left(\frac{k}{l}\right)}{\frac{k}{l}}}{\frac{\Delta\left(\frac{w}{r}\right)}{\frac{w}{r}}} = \frac{\partial\left(\frac{k}{l}\right)}{\partial\left(\frac{w}{r}\right)} \times \frac{\frac{w}{r}}{\frac{k}{l}}$$

On commence par rechercher l'expression du rapport $\frac{k}{l}$:

$$\frac{k}{l} = \frac{\frac{25w^2}{(4r+25w)^2}y^2}{\frac{4r^2}{(4r+25w)^2}y^2} = \frac{25w^2}{4r^2} = \frac{25}{4}\left(\frac{w}{r}\right)^2$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{\partial\left(\frac{k}{l}\right)}{\partial\left(\frac{w}{r}\right)} \times \frac{\frac{w}{r}}{\frac{k}{l}} = \frac{25}{4} \times 2\frac{w}{r} \times \frac{\frac{w}{r}}{\frac{25}{4}\left(\frac{w}{r}\right)^2} = 2$$

6.4 Exercice 4 (4 points)

Question 5 (4 points) : Pour déterminer la fonction de coût de l'usine A, on utilise, mutatis mutandis, les résultats de la question 3 :

$$C_A\,(w_1,w_2,y_A) = \frac{w_1 w_2}{4w_1 + 25w_2}y_A^2 = \frac{20}{20+100}y_A^2 = \frac{1}{6}y_A^2$$

On cherche ensuite la fonction de coût de l'usine B. On doit avoir :

$$\sqrt{x_1^B} = 2\sqrt{x_2^B} = y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1^B = y_B^2 \\ x_2^B = \frac{1}{4}y_B^2 \end{array} \right\}$$

Ce qui donne le coût pour l'usine B :

$$C_B(w_1, w_2, y_B) = w_1 y_B^2 + w_2 \frac{1}{4} y_B^2 = \left(w_1 + \frac{w_2}{4}\right) y_B^2 = (5+1)\, y_B^2 = 6 y_B^2$$

On peut maintenant déterminer la fonction de coût de la firme. Pour produire sans gaspillage, la firme égalise les coûts marginaux des deux usines. On doit donc résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} C'_A(y_A) = C'_B(y) \\ y_A + y_B = y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{3} y_A = 12 y_B \\ y_A + y_B = y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_A = 36 y_B \\ y_A + y_B = y \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_A = 36 y_B \\ 36 y_B + y_B = y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_A = \frac{36}{37} y \\ y_B = \frac{1}{37} y \end{array} \right\}$$

Il reste à calculer le coût :

$$\begin{aligned} C(y) &= C_A(y_A) + C_B(y_B) = \frac{1}{6} y_A^2 + 6 y_B^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{36}{37} y\right)^2 + 6\left(\frac{1}{37} y\right)^2 \\ &= \frac{36^2 + 6 \times 6}{6 \times 37^2} y^2 = \frac{36 \times 37}{6 \times 37^2} y^2 = \frac{6}{37} y^2 \end{aligned}$$

6.5 Exercice 5 (4 points)

Question 6 (4 points) : Si la firme maximise ses profits, on doit avoir :

$$\begin{aligned} p^{15} y^{15} - w_1^{15} x_1^{15} - w_2^{15} x_2^{15} &\geq p^{15} y^{16} - w_1^{15} x_1^{16} - w_2^{15} x_2^{16} \\ p^{16} y^{16} - w_1^{16} x_1^{16} - w_2^{16} x_2^{16} &\geq p^{16} y^{15} - w_1^{16} x_1^{15} - w_2^{16} x_2^{15} \end{aligned}$$

Equivalent à :

$$\begin{aligned} 10 \times 4 - 1 \times 3 - 1 \times 4 &\geq 10 \times 5 - 1 \times 3 - 1 \times 5 \\ 12 \times 5 - 2 \times 3 - 1 \times 5 &\geq 12 \times 4 - 2 \times 3 - 1 \times 4 \end{aligned}$$

Equivalent à :

$$\begin{aligned} 33 &\geq 42 \\ 49 &\geq 38 \end{aligned}$$

La première condition est violée. En 2015, la firme aurait réalisé un profit plus élevé si elle avait produit 5 unités de l'output en utilisant 3 unités de l'input 1 et 5 unités de l'input 2. Or, ce plan de production était réalisable puisque la firme l'a fait en 2016.

Le manager ne maximise pas les profits de la firme. Largo a intérêt à le remplacer.