FACULTÉ DE DROIT ET D'ÉCONOMIE

Année Universitaire 2016-2017

L2 ÉCONOMIE-GESTION

ÉPREUVE DE MICROÉCONOMIE n°1

Durée : 2H00

Session 1 : 17 octobre 2016

Les calculatrices **NE** sont **PAS** autorisées. Les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont strictement interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction**. **Barême non contractuel**.

1 Exercice 1 (5 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 < 4 \\ (x_1 - 4)^{1/4} x_2^{1/2} & \text{si} \quad x_1 \geq 4 \end{cases}$$

Question 1 (3 points) : Calculer l'élasticité d'échelle (pour $x_1 > 4$). En déduire la nature locale des rendements d'échelle.

Question 2 (2 points) : Déterminer l'équation du sentier d'expansion productive de la firme. On notera w_1 et w_2 les prix des inputs. Représenter ce sentier (pour cette représentation[1], on fixera $w_1 = w_2 = 1$).

2 Exercice 2 (4 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 x_2 < 1 \\ \ln(x_1 x_2) & \text{si} \quad x_1 x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 3 (3 points) : Calculer les fonctions de demandes conditionnelles de facteurs de cette firme.

Question 4 (1 point) : Calculer la fonction de coût de cette firme.

3 Exercice 3 (5 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

[1] Mais pas pour le calcul précédent.

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 5 (3 points) : Calculer les fonctions de demandes de facteurs de cette firme.

Question 6 (1 point) : Calculer l'offre de cette firme.

Question 7 (1 point) : Calculer le profit de cette firme.

4 Exercice 4 (2 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \min(x_1, \sqrt{x_2})$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 8 (2 points) : A court terme, la quantité du facteur 2 est fixée à $\overline{x}_2 = 100$. Calculer la fonction de demande à court terme du facteur 1 de cette firme.

5 Question de cours (4 points)

Question 9 (4 points) : On suppose qu'une firme produit un bien y vendu sur un marché concurrentiel au prix p avec la fonction de production $y = f(x_1, x_2)$. Rappeler la condition déterminant le choix de x_1 si à court terme la quantité de l'input 2 est fixée à $\overline{x}_2$. Expliquer littérairement l'intuition (pourquoi la firme n'a pas intérêt à augmenter ou à diminuer x_1).

6 Éléments de correction

6.1 Exercice 1 (5 points)

Question 1 (3 points) : Elasticité d'échelle (pour $x_1 > 4$) :

$$\begin{aligned}
e &= \frac{x_1 \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}}{f(x_1,x_2)} = \frac{x_1 \frac{1}{4}(x_1-a)^{-3/4} x_2^{1/2} + x_2 \frac{1}{2}(x_1-a)^{1/4} x_2^{-1/2}}{(x_1-a)^{1/4} x_2^{1/2}} \\
&= \frac{x_1 \frac{1}{4}(x_1-a)^{-3/4} x_2^{1/2} + \frac{1}{2}(x_1-a)^{1/4} x_2^{1/2}}{(x_1-a)^{1/4} x_2^{1/2}} = \frac{x_1 \frac{1}{4}(x_1-a)^{-3/4} + \frac{1}{2}(x_1-a)^{1/4}}{(x_1-a)^{1/4}} \\
&= \frac{x_1 \frac{1}{4}(x_1-a)^{1/4}(x_1-a)^{-1} + \frac{1}{2}(x_1-a)^{1/4}}{(x_1-a)^{1/4}} = \frac{1}{4} x_1 (x_1-a)^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\frac{x_1}{x_1-a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\frac{x_1}{x_1-4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &> 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\frac{x_1}{x_1-a} + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\frac{x_1}{x_1-a} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1-a} > 2 \Leftrightarrow x_1 > 2x_1 - 2a \\
&\Leftrightarrow 2a > x_1 \Leftrightarrow 8 > x_1
\end{aligned}$$

Les rendements d'échelle sont localement croissants pour $x_1 < 8$ et localement décroissants pour $x_1 > 8$.

Question 2 (2 points) : Le sentier d'expansion productive est le lieu géométrique des combinaisons optimales de facteurs lorsque le volume de production varie, les prix des facteurs étant donnés. Pour le tracer, il faut déterminer x_2 en fonction de x_1.

Pour produire efficacement, la firme doit choisir une combinaison d'inputs qui vérifie :

$$Tmst(x_1,x_2) = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}(x_1-4)^{-3/4} x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}(x_1-4)^{1/4} x_2^{-1/2}} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow \frac{x_2}{2(x_1-4)} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow x_2 = 2\frac{w_1}{w_2}(x_1-4)$$

6.2 Exercice 2 (4 points)

Question 3 (3 points) : Fonctions de demande conditionnelles de facteurs :

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{c} Tmst(x_1,x_2) = \frac{w_1}{w_2} \\ y = \ln(x_1 x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}} = \frac{w_1}{w_2} \\ e^y = x_1 x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \\ e^y = x_1 x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = \frac{w_1}{w_2} x_1 \\ e^y = x_1 \frac{w_1}{w_2} x_1 \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = \frac{w_1}{w_2} x_1 \\ \frac{w_2}{w_1} e^y = x_1^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = \frac{w_1}{w_2}\sqrt{\frac{w_2}{w_1} e^y} \\ x_1 = \sqrt{\frac{w_2}{w_1} e^y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = \sqrt{\frac{w_1}{w_2} e^y} \\ x_1 = \sqrt{\frac{w_2}{w_1} e^y} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Question 4 (1 point) : Fonction de coût :

$$c(w_1,w_2,y) = w_1\sqrt{\frac{w_2}{w_1} e^y} + w_2\sqrt{\frac{w_1}{w_2} e^y} = \sqrt{w_1 w_2 e^y} + \sqrt{w_1 w_2 e^y} = 2\sqrt{w_1 w_2 e^y}$$

7 Exercice 3 (5 points)

Question 5 (3 points) : Profit de la firme :

$$\pi(x_1, x_2) = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2 = p\sqrt{x_1} + p\sqrt{x_2} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

Fonctions de demandes de facteurs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 0 \Leftrightarrow pPm_1(x_1, x_2) - w_1 = 0 \Leftrightarrow p\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = w_1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \frac{p}{2w_1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{p^2}{4w_1^2} \\ \frac{\partial \pi(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_2} = \frac{p}{2w_2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{p^2}{4w_2^2} \end{aligned}$$

Question 6 (1 point) : Offre de cette firme :

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \frac{p}{2w_1} + \frac{p}{2w_2} = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$$

Question 7 (1 point) : Profit de cette firme :

$$\begin{aligned} \pi &= p\sqrt{x_1} + p\sqrt{x_2} - w_1 x_1 - w_2 x_2 = p\frac{p}{2w_1} + p\frac{p}{2w_2} - w_1\frac{p^2}{4w_1^2} - w_2\frac{p^2}{4w_2^2} \\ &= \left(\frac{1}{2w_1} + \frac{1}{2w_2} - \frac{1}{4w_1} - \frac{1}{4w_2}\right)p^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)p^2 \end{aligned}$$

8 Exercice 4 (2 points)

Question 8 (2 points) : A court terme, on a :

$$f(x_1, x_2) = \min(x_1, \sqrt{x_2}) = \min\left(x_1, \sqrt{100}\right) = \min(x_1, 10)$$

La firme n'a jamais intérêt à choisir $x_1 > 10$.

Pour $x_1 < 10$, on a $pPm_1(x_1, 10) = p$. Si $p > w_1$, la firme a intérêt à augmenter x_1 jusqu'à atteindre $x_1 = 10$. Si $p < w_1$, la firme a intérêt à réduire x_1 jusqu'à atteindre $x_1 = 0$.

On a donc :

$$x_1(w_1, p) = \begin{cases} 10 & \text{si} \quad p > w_1 \\ k \in [0; 10] & \text{si} \quad p = w_1 \\ 0 & \text{si} \quad p < w_1 \end{cases}$$

9 Question de cours (4 points)

Question 9 (4 points) : Voir cours chapitre 2.