FACULTE DE DROIT ET D'ECONOMIE

Année Universitaire 2015-2016

L2 ECONOMIE-GESTION

EPREUVE DE MICROECONOMIE n°1

Durée : 2H00

Session 1 : 12 octobre 2015

Les calculatrices **NE** sont **PAS** autorisées. Les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont strictement interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction**. **Barême non contractuel**.

1 Exercice 1 (10 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 < 10 \\ (x_1 - 10)^{1/4} x_2^{1/2} & \text{si} \quad x_1 \geq 10 \end{cases}$$

Les prix unitaires des inputs sont égaux à $w_1 = 1$ et $w_2 = 1$. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 1 (5 points) : A court terme, la quantité du facteur 2 est fixée à $\overline{x}_2 = 25$. Calculer la fonction de demande de facteur 1 de court terme de la firme.

Question 2 (5 points) : Calculer les fonctions de demande des deux facteurs de production à long terme.

2 Exercice 2 (4 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 3 (3 points) : Calculer les fonctions de demandes conditionnelles de facteurs de cette firme.

Question 4 (1 point) : Calculer la fonction de coût de cette firme.

3 Question de cours (6 points)

Question 5 (6 points) : Démontrer que, si une firme maximise ses profits, une augmentation du prix de vente ne peut pas entraîner une diminution de la production de la firme.

4 Eléments de correction

4.1 Exercice 1 (10 points)

Question 1 (5 points) : La firme ne commence à produire une quantité positive que si $x_1 > 10$. On a donc un coût quasi-fixe de démarrage de la production et il n'est pas sur que la firme aura toujours intérêt à le payer.

On commence par supposer que la firme va choisir $x_1 > 10$. Si c'est le cas, le profit de court terme de la firme 1 est égal à :

$$\pi\left(x_1, \overline{x}_2\right) = pf\left(x_1, \overline{x}_2\right) - w_1x_1 - w_2\overline{x}_2 = p\left(x_1 - 10\right)^{1/4}\overline{x}_2^{1/2} - w_1x_1 - w_2\overline{x}_2 = 5p\left(x_1 - 10\right)^{1/4} - x_1 - 25$$

On a donc :

$$\frac{\partial \pi\left(x_1, \overline{x}_2\right)}{\partial x_1} = pPm_1\left(x_1, \overline{x}_2\right) - w_1 = \frac{5}{4}p\left(x_1 - 10\right)^{-3/4} - 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi\left(x_1, \overline{x}_2\right)}{\partial x_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}p\left(x_1 - 10\right)^{-3/4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}p\left(x_1 - 10\right)^{-3/4} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}p = \left(x_1 - 10\right)^{3/4} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} = x_1 - 10 \Leftrightarrow x_1 = \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10
\end{aligned}$$

Si la firme choisit de produire à court terme, elle choisit $x_1 = \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10$. Il est cependant possible que la firme préfère ne pas produire et choisir $x_1 = 0$.

Si elle choisit $x_1 = \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10$, son profit est égal à :

$$\begin{aligned}
\pi &= 5p\left[\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10 - 10\right]^{1/4} - \left[\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10\right] - 25 \\
&= 5p\left[\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3}\right]^{1/4} - \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - 10 - 25 = 5p\left(\frac{5}{4}p\right)^{1/3} - \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - 35 \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}(5p)^{4/3} - \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - 35 = 4\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - 35 = 3\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - 35
\end{aligned}$$

Si elle choisit $x_1 = 0$, son profit est égal à -25.

La firme décide de produire si :

$$3\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} - 35 > -25 \Leftrightarrow 3\left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} > 10 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} > \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{4}p > \left(\frac{10}{3}\right)^{3/4} \Leftrightarrow p > \frac{4}{5}\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4}$$

Il reste à calculer la valeur de $x_1 = \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10$ pour $p = \frac{4}{5}\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4}$:

$$x_1 = \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10 = \left[\frac{5}{4}\frac{4}{5}\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4}\right]^{4/3} + 10 = \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4}\right]^{4/3} + 10 = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3}$$

Fonction de demande de facteur 1 à court terme :

$$x_1(p) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{5}{4}p\right)^{4/3} + 10 \quad \text{si} \quad p > \frac{4}{5}\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4} \\ 0 \quad \text{ou} \quad \frac{40}{3} \quad \text{si} \quad p = \frac{4}{5}\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4} \\ 0 \quad \text{si} \quad p < \frac{4}{5}\left(\frac{10}{3}\right)^{3/4} \end{array} \right.$$

Question 2 (5 points) : Comme pour la question précédente, on n'est pas assuré que la firme ait intérêt à produire. Si elle choisit $x_1 = x_2 = 0$, elle obtient un profit égal à 0.

Si la firme produit, son profit à long terme est :

$$\pi(x_1, x_2) = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2 = p(x_1 - 10)^{1/4} x_2^{1/2} - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= pPm_1(x_1, x_2) - w_1 = \frac{1}{4}p(x_1 - 10)^{-3/4} x_2^{1/2} - 1 \\ \frac{\partial\pi(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= pPm_2(x_1, x_2) - w_2 = \frac{1}{2}p(x_1 - 10)^{1/4} x_2^{-1/2} - 1 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\pi(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial\pi(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4}p(x_1 - 10)^{-3/4} x_2^{1/2} = 1 \\ \frac{1}{2}p(x_1 - 10)^{1/4} x_2^{-1/2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4}p(x_1 - 10)^{-3/4} \frac{1}{2}p(x_1 - 10)^{1/4} = 1 \\ \frac{1}{2}p(x_1 - 10)^{1/4} = x_2^{1/2} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{8}p^2(x_1 - 10)^{-1/2} = 1 \\ \frac{1}{4}p^2(x_1 - 10)^{1/2} = x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{8}p^2 = (x_1 - 10)^{1/2} \\ \frac{1}{4}p^2\frac{1}{8}p^2 = x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{64}p^4 = x_1 - 10 \\ \frac{1}{32}p^4 = x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = \frac{1}{64}p^4 + 10 \\ x_2 = \frac{1}{32}p^4 \end{array} \right\}$$

Le profit obtenu est alors égal à :

$$\begin{aligned} \pi &= p\left(\frac{1}{64}p^4\right)^{1/4}\left(\frac{1}{32}p^4\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{64}p^4 + 10\right) - \left(\frac{1}{32}p^4\right) = p\frac{1}{2\sqrt{2}}p\frac{1}{4\sqrt{2}}p^2 - \frac{1}{64}p^4 - \frac{1}{32}p^4 - 10 \\ &= \frac{1}{16}p^4 - \frac{1}{64}p^4 - \frac{1}{32}p^4 - 10 = \frac{4}{64}p^4 - \frac{1}{64}p^4 - \frac{2}{32}p^4 - 10 = \frac{1}{64}p^4 - 10 \end{aligned}$$

La firme a intérêt à produire si :

$$\frac{1}{64}p^4 - 10 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{64}p^4 > 10 \Leftrightarrow p^4 > 64 \times 10 \Leftrightarrow p > (64 \times 10)^{1/4} \Leftrightarrow p > 2 \times 40^{1/4}$$

Il reste à calculer les demandes de facteurs pour $p = 640^{1/4}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{64}p^4 + 10 = \frac{1}{64}640 + 10 = 20 \\ x_2 &= \frac{1}{32}p^4 = \frac{1}{32}640 = 20 \end{aligned}$$

On obtient les fonctions de demande de facteurs suivantes :

$$x_1(p) = \begin{cases} \frac{1}{64}p^4 + 10 \quad \text{si} \quad p > 2 \times 40^{1/4} \\ 0 \quad \text{ou} \quad 20 \quad \text{si} \quad p = 2 \times 40^{1/4} \\ 0 \quad \text{si} \quad p < 2 \times 40^{1/4} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x_2(p) = \begin{cases} \frac{1}{32}p^4 \quad \text{si} \quad p > 2 \times 40^{1/4} \\ 0 \quad \text{ou} \quad 20 \quad \text{si} \quad p = 2 \times 40^{1/4} \\ 0 \quad \text{si} \quad p < 2 \times 40^{1/4} \end{cases}$$

4.2 Exercice 2 (4 points)

Question 3 (3 points) : Les deux facteurs de production sont des susbtituts parfaits. La firme ne va utiliser que l'input le moins cher.

Si $w_1 < w_2$, on a $x_2 = 0$ et $y = \sqrt{x_1} \Leftrightarrow x_1 = y^2$. Les fonctions de demande conditionnelles de facteurs de la firme sont égales à :

$$x_1(w_1, w_2, y) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad w_1 > w_2 \\ k \in \left[0, y^2\right] \quad \text{si} \quad w_1 = w_2 \\ y^2 \quad \text{si} \quad w_1 < w_2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x_2(w_1, w_2, y) = \begin{cases} y^2 \quad \text{si} \quad w_1 > w_2 \\ y^2 - k \quad \text{si} \quad w_1 = w_2 \\ 0 \quad \text{si} \quad w_1 < w_2 \end{cases}$$

Question 4 (1 point) : Fonction de coût de cette firme :

$$c(w_1, w_2, y) = \min(w_1, w_2)\, y^2$$

5 Question de cours (6 points)

Question 5 (6 points) : Voir cours chapitre 2, section 9.2.