FACULTE DE DROIT ET D'ECONOMIE

Année Universitaire 2013-2014

FILIERE L2 ECONOMIE

EPREUVE DE MICROECONOMIE n°1

Durée : 2H00

Session 1 : octobre 2013

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits. **Il sera tenu compte de la rédaction**. **Barême non contractuel**.

1 Exercice 1 (8 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production : $f(k,l) = \min\left(\sqrt{l}, k\right)$ où k est la quantité de capital utilisée par la firme et l la quantité de travail employée. Le coût unitaire du capital est égal à r et celui du travail w. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 1 (2 points) : A court terme, la quantité du facteur capital est fixé à $k = 10$. Calculer la fonction de demande de travail de la firme.

Question 2 (1 point) : Calculer la fonction de coût de la firme à court terme.

Question 3 (2 points) : Calculer les fonctions de demande conditionnelle de capital et de travail de la firme à long terme.

Question 4 (1 point) : Calculer la fonction de coût à long terme de la firme.

Question 5 (2 points) : Calculer les fonctions de demande de capital et de travail de la firme à long terme.

2 Exercice 2 (3 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 6 (3 points) : Calculer la fonction de coût de cette firme.

3 Exercice 3 (5 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \min(2x_1 + x_2, 2x_2)$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 7 (3 points) : Calculer la fonction de coût de cette firme.

Question 8 (2 points) : On suppose qu'à court terme la quantité de facteur x_2 est fixée à 10, calculer la fonction de demande du facteur x_1.

4 Exercice 4 (5 points)

Une firme dispose d'une technologie représentée par la fonction de production :

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

Les prix unitaires respectifs des facteurs de production sont égaux à w_1 et w_2. Le bien produit par la firme est vendu sur un marché concurrentiel à un prix p.

Question 9 (3 points) : Calculer la fonction de coût de cette firme.

Question 10 (2 points) : On suppose qu'à court terme la quantité de facteur x_2 est fixée à 25, calculer la fonction de demande du facteur x_1.

5 Eléments de correction

5.1 Exercice 1 (8 points)

Question 1 (2 points) : Voir TD2.

Question 2 (1 point) : A court terme, il n'est pas possible de produire $y > 10$. On va donc se concentrer sur les niveaux de production $y \leq k$. Pour produire ces niveaux d'output, on a besoin de $\sqrt{l} = y$. Ce qui donne $l = y^2$.

On a donc :

$$c(w, r, y) = \begin{cases} wy^2 + 10r & \text{si} \quad y \leq 10 \\ +\infty & \text{si} \quad y > 10 \end{cases}$$

Question 3 (2 points) : Voir TD2.

Question 4 (1 point) : Voir TD2.

Question 5 (2 points) : Voir TD2.

5.2 Exercice 2 (3 points)

Question 6 (3 points) :

$$c(w_1, w_2, y) = \frac{w_1 w_2}{w_1 + 4w_2} y^2$$

Voir le TD3 pour les détails.

5.3 Exercice 3 (5 points)

Question 7 (3 points) : La firme n'a jamais intérêt à choisir une quantité de x_1 telle que $2x_1 + x_2 > 2x_2$. Car elle pourrait réduire ses coûts, en réduisant la quantité de l'input 1, sans réduire sa production. On a donc nécessairement $2x_1 + x_2 \leq 2x_2$. Comme le problème est linéaire, la firme va choisir $x_1 = 0$ ou x_1 tel que $2x_1 + x_2 = 2x_2$. On peut donc se limiter à étudier ces cas.

La firme peut produire le bien en utilisant uniquement l'input 2. Elle doit alors acheter une quantité $x_2 = y$. Ce qui coûte $w_2 y$.

La firme peut aussi choisir la quantité x_1 telle que $2x_1 + x_2 = 2x_2$.

$$2x_1 + x_2 = 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$$

On doit avoir $2x_2 = y$, donc $x_2 = \frac{y}{2}$, et $x_1 = \frac{x_2}{2}$, donc $x_1 = \frac{y}{4}$.

Cette solution coûte : $w_1 \frac{y}{4} + w_2 \frac{y}{2} = \left(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) y$.

La première solution est choisie si et seulement si :

$$w_2 y \leq \left(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) y \Leftrightarrow w_2 \leq \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}w_2 \leq \frac{1}{4}w_1 \Leftrightarrow w_2 \leq \frac{1}{2}w_1$$

Ce qui donne la fonction de coût suivante :

$$c(w_1, w_2, y) = \min\left(\frac{w_1}{4} + \frac{w_2}{2}, w_2\right) y = \left[\min\left(\frac{w_1}{4}, \frac{w_2}{2}\right) + \frac{w_2}{2}\right] y = \left[\frac{1}{2}\min\left(\frac{w_1}{2}, w_2\right) + \frac{w_2}{2}\right] y$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$c(w_1, w_2, y) = \begin{cases} w_2 y & \text{si} \quad w_2 \leq \frac{1}{2}w_1 \\ \left(\frac{w_1}{4} + \frac{w_2}{2}\right) y & \text{si} \quad w_2 > \frac{1}{2}w_1 \end{cases}$$

Question 8 (2 points) : La fonction de profit à court terme de la firme est égale à :

$$\begin{aligned} \pi(x_1, \overline{x}_2) &= pf(x_1, \overline{x}_2) - w_1 x_1 - w_2 \overline{x}_2 = p \min(2x_1 + 10, 20) - w_1 x_1 - 10w_2 \\ &= 10p + p \min(2x_1, 10) - w_1 x_1 - 10w_2 \end{aligned}$$

Il n'est jamais optimal de choisir $2x_1 > 10$. En partant de $x_1 = 0$, l'achat d'une unité de x_1 permet de produire deux unités d'output. L'achat d'une unité de x_1 génère donc des recettes égales à $2p$ et des coûts égaux à w_1. Cet achat permet d'augmenter les profits de la firme si et seulement si : $2p > w_1$.

La fonction de demande du facteur x_1 à court terme est donc :

$$c(w_1, w_2, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad w_1 > 2p \\ k \in [0, 5] & \text{si} \quad w_1 = 2p \\ 5 & \text{si} \quad w_1 < 2p \end{cases}$$

5.4 Exercice 4 (5 points)

Question 9 (3 points) : Programme :

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \text{ s/c } y = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

La minimisation des coûts impose :

$$TMST(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-1/2}} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow w_1 x_1 = w_2 x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{w_2}{w_1}x_2$$

Or on a aussi

$$y = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

D'où

$$y = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}x_2}\sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}x_2 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}y$$

On en déduit :

$$x_1 = \frac{w_2}{w_1}x_2 = \frac{w_2}{w_1}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}y = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}y$$

D'où

$$c\left(w_1, w_2, y\right) = w_1 x_2 + w_2 x_2 = w_1\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}y + w_2\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}y = 2\sqrt{w_1 w_2}y$$

Question 10 (2 points) : La fonction de profit à court terme de la firme est égale à :

$$\pi\left(x_1, \overline{x}_2\right) = pf\left(x_1, \overline{x}_2\right) - w_1 x_1 - w_2\overline{x}_2 = p\sqrt{x_1}\sqrt{25} - w_1 x_1 - 25w_2 = 5p\sqrt{x_1} - w_1 x_1 - 25w_2$$

La solution est intérieure. On dérive et on égalise à 0 :

$$\frac{\partial\pi\left(x_1, \overline{x}_2\right)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5p}{2\sqrt{x_1}} - w_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{5p}{2w_1} = \sqrt{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{25p^2}{4w_1^2}$$