M1 Economie : "colle" d'économie industrielle

Armel JACQUES*

16 octobre 2014

Les calculatrices sont autorisées ; en revanche, **les appareils permettant de communiquer (téléphone portable ou autres) sont interdits**.

1 Hotelling (5 points)

Les consommateurs sont répartis uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$. L'utilité d'un consommateur x lorsqu'il consomme une unité de bien achetée à la firme i, localisée au point x_i, est égale à :

$$U = 50 - |x - x_i| - p_i$$

Deux firmes, situées en $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{4}{5}$, se livrent une concurrence en prix. Le coût marginal des deux firmes est constant et normalisé à 0.

Question 1 (5 points) : Calculer les prix d'équilibre de ce jeu. Calculer les parts de marché des firmes et leurs profits.

2 Concurrence en quantités (6 points)

On considère une industrie comprenant 2 firmes. Les fonctions de coût des firmes sont égales à :

$$C_1(q_1) = q_1^2 \qquad \text{et} \qquad C_2(q_2) = q_2^2$$

La fonction de demande inverse est égale à :

$$P(Q) = A - Q \qquad \text{avec} \quad Q = \sum_{i=1}^{2} q_i$$

*CEMOI, Université de La Réunion, Faculté de Droit et d'Economie, 15, avenue René Cassin, 97715 Saint-Denis messag cedex 9. Email : Armel.Jacques@univ-reunion.fr.

Question 2 (3 points) : Déterminer l'équilibre de Cournot (prix d'équilibre, quantités produites et profits) de cette industrie.

Question 3 (3 points) : Déterminer l'équilibre de Stackelberg de ce jeu lorsque la firme 1 est leader.

3 Entrée (10 points)

On considère une industrie composée d'une firme en position de monopole (firme 1) et d'un entrant potentiel (firme 2). La chronologie du jeu est la suivante. Lors de la première étape, la firme 1 choisit la quantité q_1 qu'elle souhaite produire. Lors de la seconde étape, la firme 2 observe q_1, puis décide d'investir F pour pouvoir entrer dans cette industrie ou de rester hors de l'industrie. Si la firme 2 a choisi d'investir, elle choisit ensuite la quantité q_2 qu'elle souhaite produire.

Les fonctions de coût des firmes sont égales à :

$$C_1(q_1) = q_1^2 \qquad \text{et} \qquad C_2(q_2) = \begin{cases} q_2^2 + F & \text{si} \quad q_2 > 0 \\ 0 & \text{si} \quad q_2 = 0 \end{cases}$$

La fonction de demande inverse est égale à :

$$P(Q) = A - Q \qquad \text{avec} \quad Q = \sum_{i=1}^{2} q_i$$

Question 4 (10 points) : Déterminer l'équilibre de ce jeu (décision d'entrée de la firme 2, quantités produites par les deux firmes, prix d'équilibre et profits des firmes) selon la valeur de F.

4 Eléments de correction

4.1 Hotelling (5 points)

Question 1 (5 points) : On recherche le consommateur marginal :

$$50 - |\widetilde{x} - x_1| - p_1 = 50 - |\widetilde{x} - x_2| - p_2 \Leftrightarrow -(\widetilde{x} - x_1) - p_1 = -(x_2 - \widetilde{x}) - p_2$$

$$\Leftrightarrow p_2 - p_1 + x_2 + x_1 = 2\widetilde{x} \Leftrightarrow \widetilde{x} = \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1)$$

Les demandes des firmes sont égales à :

$$\begin{aligned} D_1(p_1, p_2, x_1, x_2) &= \widetilde{x} = \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1) \\ D_2(p_1, p_2, x_1, x_2) &= 1 - \widetilde{x} = 1 - \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1) \end{aligned}$$

Fonction de meilleure réponse de la firme 1 : Le profit de la firme 1 est égal à :

$$\pi_1 = p_1 D_1(p_1, p_2, x_1, x_2) = p_1 \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1)$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1) - \frac{1}{2}p_1 = 0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{2}(p_2 + x_2 + x_1)$$

Fonction de meilleure réponse de la firme 2 : Le profit de la firme 2 est égal à :

$$\pi_2 = p_2 D_2(p_1, p_2, x_1, x_2) = p_2 \left[1 - \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1)\right]$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1) - \frac{1}{2}p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = 1 + \frac{1}{2}(p_1 - x_2 - x_1)$$

Equilibre en prix : D'après l'énoncé, on a : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{4}{5}$. D'où :

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{1}{2}(p_2 + x_2 + x_1) \\ p_2 = 1 + \frac{1}{2}(p_1 - x_2 - x_1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{1}{2}\left(p_2 + \frac{4}{5} + 0\right) \\ p_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(p_1 - \frac{4}{5} - 0\right) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{1}{2}\left(p_2 + \frac{4}{5}\right) \\ p_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(p_1 - \frac{4}{5}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2p_1 = p_2 + \frac{4}{5} \\ p_2 = 1 + \frac{1}{2}p_1 - \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2p_1 - \frac{4}{5} = p_2 \\ 2p_1 - \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}p_1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2p_1 - \frac{4}{5} = p_2 \\ \frac{3}{2}p_1 = \frac{7}{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{14}{15} \\ p_2 = 2 \times \frac{14}{15} - \frac{4}{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{14}{15} \\ p_2 = \frac{28}{15} - \frac{12}{15} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \frac{14}{15} \\ p_2 = \frac{16}{15} \end{array} \right\}$$

L'adresse du consommateur marginal est :

$$\widetilde{x} = \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + x_2 + x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{15} - \frac{14}{15} + \frac{4}{5} + 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{15} + \frac{12}{15}\right) = \frac{7}{15}$$

Les parts de marchés respectives des firmes sont donc : $\frac{7}{15}$ pour la firme 1 et $\frac{8}{15}$ pour la firme 2.

Les profits des firmes sont égaux à :

$$\pi_1 = p_1 \widetilde{x} = \frac{14}{15} \times \frac{7}{15} = \frac{98}{225} \qquad \text{et} \qquad \pi_2 = p_2 \left(1 - \widetilde{x}\right) = \frac{16}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{128}{225}$$

4.2 Concurrence en quantités (6 points)

Question 2 (3 points) : Profit de la firme 1 :

$$\pi_1 \left(q_1, q_2\right) = P \left(q_1 + q_2\right) q_1 - C_1(q_1) = \left(A - q_1 - q_2\right) q_1 - q_1^2$$

Fonction de meilleure réponse :

$$\frac{\partial \pi_1 \left(q_1, q_2\right)}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow A - q_1 - q_2 - q_1 - 2q_1 = 0 \Leftrightarrow 4q_1 = A - q_2 \Leftrightarrow q_1 = \frac{A - q_2}{4}$$

Equilibre :

$$\left\{ \begin{array}{c} 4q_1 = A - q_2 \\ 4q_2 = A - q_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_2 = A - 4q_1 \\ 4\left(A - 4q_1\right) = A - q_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_2 = A - 4q_1 \\ 4A - 16q_1 = A - q_1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_2 = A - 4q_1 \\ 3A = 15q_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_2 = A - 4\frac{A}{5} \\ \frac{A}{5} = q_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_2 = \frac{A}{5} \\ q_1 = \frac{A}{5} \end{array} \right\}$$

Prix d'équilibre :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{A}{5} - \frac{A}{5} = \frac{3}{5}A$$

Profits des firmes :

$$\pi_1 = pq_1 - q_1^2 = \frac{3}{5}A\frac{A}{5} - \left(\frac{A}{5}\right)^2 = \frac{3}{25}A^2 - \frac{1}{25}A^2 = \frac{2}{25}A^2 = \pi_2$$

Question 3 (3 points) : On résoud le jeu par récurrence amont. On a déjà calculé la fonction de meilleure réponse de la firme 2 :

$$q_2\left(q_1\right) = \frac{A - q_1}{4}$$

On la reporte dans l'expression du profit de la firme 1 :

$$\begin{aligned} \pi_1\left(q_1\right) &= P\left(q_1 + q_2\left(q_1\right)\right) q_1 - C_1(q_1) = \left(A - q_1 - q_2\left(q_1\right)\right) q_1 - q_1^2 \\ &= \left(A - q_1 - \frac{A - q_1}{4}\right) q_1 - q_1^2 = \frac{3}{4}\left(A - q_1\right) q_1 - q_1^2 \end{aligned}$$

Quantité choisie par la firme leader :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1\left(q_1\right)}{dq_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(A - q_1\right) - \frac{3}{4}q_1 - 2q_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}A - \frac{6}{4}q_1 - \frac{8}{4}q_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}A = \frac{14}{4}q_1 \Leftrightarrow q_1 = \frac{3}{14}A \end{aligned}$$

Quantité choisie par la firme *follower* :

$$q_2 = \frac{1}{4}(A - q_1) = \frac{1}{4}\left(A - \frac{3}{14}A\right) = \frac{1}{4}\frac{11}{14}A = \frac{11}{56}A$$

Prix d'équilibre :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{3}{14}A - \frac{11}{56}A = \frac{56 - 12 - 11}{56}A = \frac{33}{56}A$$

Profits des firmes :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= pq_1 - q_1^2 = \frac{33}{56}A\frac{3}{14}A - \left(\frac{3}{14}A\right)^2 = \frac{33 \times 3 - 9 \times 4}{4 \times 14 \times 14}A^2 = \frac{63}{784}A^2 = \frac{9}{112}A^2 \\
\pi_2 &= pq_2 - q_2^2 = \frac{33}{56}A\frac{11}{56}A - \left(\frac{11}{56}A\right)^2 = \frac{(33 - 11) \times 11}{56 \times 56}A^2 = \frac{22 \times 11}{56 \times 56}A^2 = \frac{121}{1568}A^2
\end{aligned}$$

4.3 Entrée (10 points)

Selon la valeur de F, on aura l'une des trois situations suivantes. (1) Si F est très grand, la firme 2 n'entre pas lorsque la firme 1 produit la quantité de monopole. La firme 1 se comporte alors comme un monopole. On va désigner par "**entrée bloquée**" cette situation. (2) Si F est très faible, il sera trop coûteux pour la firme 1 de produire un q_1 suffisamment grand pour dissuader l'entrée de la firme 2. La firme 1 va alors accepter l'entrée de la firme 2 et les quantités produites seront celles de l'équilibre de Stackelberg, que l'on a calculé dans l'exercice 1. On va dénommer cette situation "**entrée acceptée**". (3) Si F est intermédiaire, la firme 1 peut augmenter q_1 au delà de la quantité de monopole afin de dissuader la firme 2 d'entrer. Situation que l'on va appeler "**entrée dissuadée**".

4.3.1 Entrée bloquée

La firme 1 se comporte comme un monopole (car elle sait que la firme 2 n'entrera pas pour cette quantité). Comportement de la firme 1 :

$$\pi_1(q_1) = (A - q_1)q_1 - q_1^2$$

$$\frac{d\pi_1(q_1)}{dq_1} = 0 \Leftrightarrow A - q_1 - q_1 - 2q_1 = 0 \Leftrightarrow 4q_1 = A \Leftrightarrow q_1 = \frac{A}{4}$$

$$p = A - q_1 = \frac{3}{4}A$$

$$\pi_1 = pq_1 - q_1^2 = \frac{3}{4}A\frac{A}{4} - \left(\frac{A}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}A^2 - \frac{A^2}{16} = \frac{1}{8}A^2 = 0,125A^2$$

Il faut vérifier que la firme 2 n'a pas intérêt à entrer. Si la firme 2 entre, elle choisit la quantité donnée par sa fonction de meilleure réponse :

$$q_2(q_1) = \frac{A - q_1}{4} = \frac{1}{4}\left(A - \frac{A}{4}\right) = \frac{3}{16}A$$

On a alors :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{1}{4}A - \frac{3}{16}A = \frac{16-4-3}{16}A = \frac{9}{16}A$$

$$\pi_2 = pq_2 - q_2^2 - F = \frac{9}{16}A\frac{3}{16}A - \left(\frac{3}{16}A\right)^2 - F = \frac{(9-3)\times 3}{16\times 16}A^2 - F = \frac{18}{256}A^2 - F = \frac{9}{128}A^2 - F$$

L'entrée est bloquée si $F > \frac{9}{128}A^2 \simeq 0,07A^2$.

4.3.2 Entrée acceptée

Si la firme 1 se résigne à ce que la firme 2 entre, les firmes produisent les quantités calculées dans l'exercice 2 (question 3). On a alors :

$$\pi_1 = \frac{9}{112}A^2 \simeq 0,080357A^2 \qquad \text{et} \qquad \pi_2 = \frac{121}{1568}A^2 - F \simeq 0,077168A^2 - F$$

4.3.3 Entrée dissuadée

La firme 1 peut choisir d'augmenter sa production au delà de la quantité de monopole pour dissuader la firme 2 d'entrer. On calcule le profit de la firme 2 si elle décide d'entrer en fonction de la quantité q_1.

Si la firme 2 entre, elle choisit la quantité donnée par sa fonction de meilleure réponse :

$$q_2(q_1) = \frac{A-q_1}{4}$$

On a alors :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - q_1 - \frac{A-q_1}{4} = \frac{3}{4}(A-q_1)$$

$$\pi_2 = pq_2 - q_2^2 - F = \frac{3}{4}(A-q_1)\frac{A-q_1}{4} - \left(\frac{A-q_1}{4}\right)^2 - F = \frac{3-1}{16}(A-q_1)^2 - F = \frac{1}{8}(A-q_1)^2 - F$$

Pour dissuader l'entrée, la firme 1 doit choisir q_1 telle que :

$$\pi_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(A-q_1)^2 - F \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(A-q_1)^2 \leq F \Leftrightarrow (A-q_1)^2 \leq 8F \Leftrightarrow A - q_1 \leq 2\sqrt{2F} \Leftrightarrow q_1 \geq A - 2\sqrt{2F}$$

La firme 1 choisit la plus petite quantité permettant de dissuader l'entrée (elle produit déjà plus que la quantité de monopole). On a donc : $q_1 = A - 2\sqrt{2F}$.

$$p = A - q_1 = A - \left(A - 2\sqrt{2F}\right) = 2\sqrt{2F}$$

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= pq_1 - q_1^2 = 2\sqrt{2F}\left(A-2\sqrt{2F}\right) - \left(A-2\sqrt{2F}\right)^2 = \left(2\sqrt{2F} - A + 2\sqrt{2F}\right)\left(A-2\sqrt{2F}\right) \\
&= \left(4\sqrt{2F} - A\right)\left(A - 2\sqrt{2F}\right) \\
&= 4\sqrt{2F}\left(A-2\sqrt{2F}\right) - A\left(A-2\sqrt{2F}\right) = 4\sqrt{2F}A - 16F - A^2 + 2\sqrt{2F}A = 6\sqrt{2F}A - 16F - A^2
\end{aligned}$$

[La formule n'est pas applicable pour n'importe quelles valeurs de A et de F. L'équilibre que l'on cherche n'a de sens que si l'entrée n'est pas bloquée. L'entrée est bloquée si $F > \frac{9}{128}A^2 = 0,0703125A^2$.

On peut aussi exclure les valeurs de F conduisant à une valeur de π_1 négative. Pour que π_1 soit positif, on doit avoir : $4\sqrt{2F} - A \geq 0 \Leftrightarrow 32F \geq A^2 \Leftrightarrow F \geq \frac{1}{32}A^2 \simeq 0,03125A^2$].

La dernière étape consiste à comparer les profits de la firme 1 dans la situation où l'entrée est dissuadée et dans celle où elle est acceptée. La firme 1 préfère la première situation à la seconde si :

$$6\sqrt{2F}A - 16F - A^2 \geq \frac{9}{112}A^2 \Leftrightarrow 0 \geq \frac{121}{112}A^2 - 6\sqrt{2F}A + 16F$$

On pose $x = \sqrt{F}$. On obtient :

$$0 \geq 16x^2 - 6\sqrt{2}Ax + \frac{121}{112}A^2$$

On recherche les racines de ce polynôme du second degré :

$$\Delta = 36 \times 2A^2 - 4 \times 16 \times \frac{121}{112}A^2 = \left(72 - 4 \times \frac{121}{7}\right)A^2 = \frac{7 \times 72 - 4 \times 121}{7}A^2 = \frac{20}{7}A^2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6\sqrt{2}A - \sqrt{\frac{20}{7}A^2}}{32} = \frac{6\sqrt{2}A - 2\sqrt{\frac{5}{7}}A}{32} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{5}{7}}}{16}A > 0 \\ x_2 &= \frac{6\sqrt{2}A + \sqrt{\frac{20}{7}A^2}}{32} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{5}{7}}}{16}A > 0 \end{aligned}$$

On remplace les x_i par $\sqrt{F}$. Les deux bornes deviennent :

$$\begin{aligned} \sqrt{F_1} &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{5}{7}}}{16}A \Leftrightarrow F_1 = \frac{\left(3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2}{256}A^2 \simeq 0,04509A^2 \\ \sqrt{F_2} &= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{5}{7}}}{16}A \Leftrightarrow F_2 = \frac{\left(3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2}{256}A^2 \simeq 0,10112A^2 \end{aligned}$$

F_2 est supérieur à la valeur de F au-dessus de laquelle on se trouve dans la situation "entrée bloquée".

On a donc :

- Si $F < 0,04509A^2$, l'équilibre est "entrée acceptée".

- Si $0,04509A^2 < F < 0,07031A^2$, l'équilibre est "entrée dissuadée".

- Si $0,07031A^2 < F$, l'équilibre est "entrée bloquée".