FACULTÉ DE DROIT ET D'ÉCONOMIE

Année Universitaire 2015-2016

M1 ÉCONOMIE

ÉPREUVE D'ÉCONOMIE INDUSTRIELLE

Durée : 2H00

Session 1 : 26 Novembre 2015

Les calculatrices sont autorisées (mais pas les téléphones portables).

1 Equilibre de Stackelberg (6 points)

On considère une industrie comprenant deux firmes produisant des biens homogènes. La fonction de coût de chacune des firmes est égale à $C(q_i) = 2q_i^2 + 10$. Les firmes se livrent une concurrence en quantités et choisissent leur niveau de production séquentiellement. C'est la firme 1 qui joue le rôle de leader. La fonction de demande inverse est égale à : $P(Q) = A - Q$, où Q représente la quantité totale produite.

Question 1 (6 points) : Calculer l'équilibre de Stackelberg.

2 Collusion tacite (7 points)

On considère un oligopole formé de 2 firmes se livrant une concurrence en quantités à la Cournot avec des biens homogènes. La fonction de demande inverse est donnée par $P(Q) = A - Q$, où Q représente la quantité totale produite. Les firmes ont des fonctions de coût identiques et égales à : $C(q_i) = 2q_i^2$. Le jeu est répété indéfiniment.

Question 2 (7 points) : Quelle est la valeur minimale du taux d'actualisation, δ, nécessaire pour que les firmes puissent soutenir le prix de monopole avec des stratégies à seuil ?

3 Restrictions verticales (7+5 points)

On considère une industrie composée d'un producteur (M) en situation de monopole et de deux distributeurs (D1 et D2) différenciés. Le coût unitaire de production de M est constant et égal à c. Pour vendre une unité du bien, les distributeurs doivent en acheter une unité auprès du producteur et subir un coût unitaire de distribution constant, normalisé à 0.

Les fonctions de demande s'adressant aux distributeurs sont égales à :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = a - p_1 + \frac{1}{2}p_2 \\ q_2 = a - p_2 + \frac{1}{2}p_1 \end{array} \right\}$$

Le jeu comprend deux étapes. Lors de la première, le producteur propose un contrat à chacun des distributeurs (chacun des distributeurs est capable d'observer le contrat proposé à l'autre distributeur). Les contrats proposés sont des tarifications binômes. Le distributeur i doit payer un coût fixe F_i au producteur et peut ensuite acheter la quantité qu'il souhaite à un prix unitaire w_i. Lors de la seconde étape, les distributeurs acceptent ou refusent le contrat proposé. Si un distributeur accepte le contrat, il choisit le prix final p_i et achète la quantité de bien qu'il souhaite auprès du producteur.

Question 3 (5 points) : Déterminer l'équilibre de Nash parfait de ce jeu.

Question 4 (2 points) : Est-il possible d'augmenter les profits totaux de cette industrie en introduisant d'autres clauses dans les contrats ? Si oui, lesquelles ?

Question 5 (Hors barème) (5 points) : Montrer que les contrats déterminés à la question 3 ne sont pas robustes à une renégociation entre M et l'un des distributeurs.

4 CORRECTION (éléments de)

4.1 Equilibre de Stackelberg (6 points)

Question 1 (6 points) : On commence par cherche la fonction de meilleure réponse de la firme 2.

$$\begin{aligned}
\pi_2(q_1, q_2) &= (A - q_1 - q_2) q_2 - 2q_2^2 - 10 = (A - q_1) q_2 - 3q_2^2 - 10 \\
\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= 0 \Leftrightarrow A - q_1 - 6q_2 = 0 \Leftrightarrow q_2 = \frac{1}{6}(A - q_1)
\end{aligned}$$

Quantité produite par la firme leader :

$$\begin{aligned}
\pi_1(q_1) &= [A - q_1 - q_2(q_1)] q_1 - 2q_1^2 - 10 = \left[A - q_1 - \frac{1}{6}(A - q_1)\right] q_1 - 2q_1^2 - 10 \\
&= \frac{5}{6}(A - q_1) q_1 - 2q_1^2 - 10 = \frac{5}{6}Aq_1 - \frac{5}{6}q_1^2 - \frac{12}{6}q_1^2 - 10 = \frac{5}{6}Aq_1 - \frac{17}{6}q_1^2 - 10 \\
\frac{\partial \pi_1(q_1)}{\partial q_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6}A - \frac{34}{6}q_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{34}{6}q_1 = \frac{5}{6}A \Leftrightarrow q_1 = \frac{5}{34}A \simeq 0,147A
\end{aligned}$$

Quantité produite par la firme *follower* :

$$q_2 = \frac{1}{6}(A - q_1) = \frac{1}{6}\left(A - \frac{5}{34}A\right) = \frac{1}{6} \times \frac{29}{34}A = \frac{29}{204}A \simeq 0,142A$$

Prix d'équilibre :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{5}{34}A - \frac{29}{204}A = \frac{204 - 30 - 29}{204}A = \frac{145}{204}A \simeq 0,711A$$

Profits des firmes :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= pq_1 - 2q_1^2 - 10 = (p - 2q_1) q_1 - 10 = \left(\frac{145}{204}A - 2\frac{5}{34}A\right)\frac{5}{34}A - 10 \\
&= \left(\frac{145 - 60}{204}\right)\frac{5}{34}A^2 - 10 = \frac{85}{204} \times \frac{5}{34}A^2 - 10 = \frac{425}{6936}A^2 - 10 \simeq 0,0613A^2 - 10 \\
\pi_2 &= (p - 2q_2) q_2 - 10 = \left(\frac{145}{204}A - 2\frac{29}{204}A\right)\frac{29}{204}A - 10 = \frac{87}{204} \times \frac{29}{204}A^2 - 10 \\
&= \frac{2523}{41616}A^2 - 10 \simeq 0,0606A^2 - 10
\end{aligned}$$

4.2 Collusion tacite (7 points)

Question 2 (7 points) : Profits sur le sentier de punition : Si une firme dévie, les firmes reviennent à l'équilibre de Cournot du jeu non répété. La fonction de réaction des firmes est égale à :

$$q_i = \frac{1}{6}(A - q_j)$$

Quantités d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{c} q_2 = \frac{1}{6}(A - q_1) \\ q_1 = \frac{1}{6}(A - q_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6q_2 = A - q_1 \\ q_1 = \frac{1}{6}(A - q_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_1 = A - 6q_2 \\ A - 6q_2 = \frac{1}{6}(A - q_2) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_1 = A - 6q_2 \\ 6A - 36q_2 = A - q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_1 = A - 6q_2 \\ 5A = 35q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_1 = A - 6\frac{1}{7}A = \frac{1}{7}A \\ q_2 = \frac{1}{7}A \end{array} \right\}$$

Prix d'équilibre :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{1}{7}A - \frac{1}{7}A = \frac{5}{7}A$$

Profits :

$$\pi_1^P = \pi_2^P = (p - 2q_1)\, q_1 = \left(\frac{5}{7}A - 2\frac{1}{7}A\right)\frac{1}{7}A = \frac{3}{49}A^2$$

Profits sur le sentier de collusion : Profits joints de l'industrie :

$$\Pi(q_1, q_2) = (A - q_1 - q_2)(q_1 + q_2) - 2q_1^2 - 2q_2^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= 0 \Leftrightarrow A - q_1 - q_2 - (q_1 + q_2) - 4q_1 = 0 \Leftrightarrow A - 2q_2 - 6q_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= 0 \Leftrightarrow A - q_1 - q_2 - (q_1 + q_2) - 4q_2 = 0 \Leftrightarrow A - 2q_1 - 6q_2 = 0 \end{aligned}$$

Quantités sur le sentier de collusion :

$$\left\{ \begin{array}{c} A - 2q_2 - 6q_1 = 0 \\ A - 2q_1 - 6q_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A - 6q_1 = 2q_2 \\ A - 2q_1 = 6q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A - 6q_1 = 2q_2 \\ A - 2q_1 = 3A - 18q_1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{A}{2} - 3q_1 = q_2 \\ 16q_1 = 2A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_2 = \frac{4}{8}A - 3\frac{1}{8}A = \frac{1}{8}A \\ q_1 = \frac{1}{8}A \end{array} \right\}$$

Prix de collusion :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}A = \frac{6}{8}A = \frac{3}{4}A$$

Profits de collusion :

$$\pi_1^C = \pi_2^C = (p - 2q_1)\, q_1 = \left(\frac{3}{4}A - 2\frac{1}{8}A\right)\frac{1}{8}A = \frac{1}{16}A^2$$

Profits de déviation : Quantité choisie par la firme qui dévie :

$$q_i = \frac{1}{6}(A - q_j) = \frac{1}{6}\left(A - \frac{1}{8}A\right) = \frac{7}{48}A$$

Prix lors de la période de déviation :

$$p = A - q_1 - q_2 = A - \frac{1}{8}A - \frac{7}{48}A = \frac{48 - 6 - 7}{48}A = \frac{35}{48}A$$

Profits de la firme qui dévie :

$$\pi_i^D = (p - 2q_i)\, q_i = \left(\frac{35}{48}A - 2\frac{7}{48}A\right)\frac{7}{48}A = \frac{21}{48}\frac{7}{48}A^2 = \frac{7}{16}\frac{7}{48}A^2 = \frac{49}{768}A^2$$

Condition de soutenabilité de la collusion :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\delta}\pi_i^C &\geq \pi_i^D + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i^P \Leftrightarrow \frac{1}{1-\delta}\frac{1}{16}A^2 \geq \frac{49}{768}A^2 + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{3}{49}A^2 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \geq \frac{49}{768}(1-\delta) + \frac{3}{49}\delta \\
&\Leftrightarrow \frac{49}{768}\delta - \frac{3}{49}\delta \geq \frac{49}{768} - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{49 \times 49 - 3 \times 768}{768 \times 49}\delta \geq \frac{49-48}{768} \Leftrightarrow \frac{97}{49}\delta \geq 1 \Leftrightarrow \delta \geq \frac{49}{97}
\end{aligned}$$

4.3 Relations verticales (7+5 points)

Question 3 (5 points) : On commence par rechercher les prix choisis par les distributeurs en fonction des prix de gros unitaires pratiqués par le producteur.

Profit du distributeur i :

$$\pi_{Di} = (p_i - w_i)\left(a - p_i + \frac{1}{2}p_j\right) - F_i$$

$$\frac{\partial \pi_{Di}}{\partial p_i}0 \Leftrightarrow a - p_i + \frac{1}{2}p_j - p_i + w_i = 0 \Leftrightarrow 2p_i = a + w_i + \frac{1}{2}p_j$$

Prix d'équilibre :

$$\left\{\begin{array}{c} 2p_1 = a + w_1 + \frac{1}{2}p_2 \\ 2p_2 = a + w_2 + \frac{1}{2}p_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 4p_1 = 2a + 2w_1 + p_2 \\ 2p_2 = a + w_2 + \frac{1}{2}p_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} p_2 = 4p_1 - 2a - 2w_1 \\ 8p_1 - 4a - 4w_1 = a + w_2 + \frac{1}{2}p_1 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} p_2 = 4p_1 - 2a - 2w_1 \\ \frac{15}{2}p_1 = 5a + 4w_1 + w_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} p_2 = \frac{8}{15}(5a + 4w_1 + w_2) - 2a - 2w_1 \\ p_1 = \frac{2}{15}(5a + 4w_1 + w_2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} p_2 = \frac{10a + 2w_1 + 8w_2}{15} \\ p_1 = \frac{10a + 8w_1 + 2w_2}{15} \end{array}\right\}$$

Profits des distributeurs :

$$\begin{aligned}
\pi_{D1} &= (p_1 - w_1)\left(a - p_1 + \frac{1}{2}p_2\right) - F_1 \\
&= \left(\frac{10a + 8w_1 + 2w_2}{15} - w_1\right)\left(a - \frac{10a + 8w_1 + 2w_2}{15} + \frac{1}{2}\frac{10a + 2w_1 + 8w_2}{15}\right) - F_1 \\
&= \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)\frac{15a - 10a - 8w_1 - 2w_2 + 5a + w_1 + 4w_2}{15} - F_1 \\
&= \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15} - F_1 = \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)^2 - F_1 \\
\pi_{D2} &= (p_2 - w_2)\left(a - p_2 + \frac{1}{2}p_1\right) - F_2 = \left(\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}\right)^2 - F_2
\end{aligned}$$

On s'intéresse ensuite aux contrats choisis par le producteur.

Profit du producteur :

$$\pi_M = (w_1 - c)\left(a - p_1 + \frac{1}{2}p_2\right) + F_1 + (w_2 - c)\left(a - p_2 + \frac{1}{2}p_1\right) + F_2$$

Les contrats doivent être acceptés par les distributeurs. On doit donc avoir :

$$\begin{aligned}
\pi_{D1} &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)^2 - F_1 \geq 0 \Leftrightarrow F_1 \leq \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)^2 \\
\pi_{D2} &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}\right)^2 - F_2 \geq 0 \Leftrightarrow F_2 \leq \left(\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}\right)^2
\end{aligned}$$

Le producteur a intérêt à saturer ces contraintes et à choisir :

$$F_1 = \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left(\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}\right)^2$$

On a donc :

$$\pi_M = (w_1 - c)\left(a - p_1 + \frac{1}{2}p_2\right) + F_1 + (w_2 - c)\left(a - p_2 + \frac{1}{2}p_1\right) + F_2$$

$$\begin{aligned}
&= (w_1 - c)\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15} + \left(\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)^2 + (w_2 - c)\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15} + \left(\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}\right)^2 \\
&= \left(w_1 - c + \frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15}\right)\frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15} + \left(w_2 - c + \frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}\right)\frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10a + 8w_1 + 2w_2 - 15c}{15} \times \frac{10a - 7w_1 + 2w_2}{15} + \frac{10a + 8w_2 + 2w_1 - 15c}{15} \times \frac{10a - 7w_2 + 2w_1}{15} \\
&= \frac{1}{225}\left[(10a + 8w_1 + 2w_2 - 15c)(10a - 7w_1 + 2w_2) + (10a + 8w_2 + 2w_1 - 15c)(10a - 7w_2 + 2w_1)\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi_M}{\partial w_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$8(10a - 7w_1 + 2w_2) - 7(10a + 8w_1 + 2w_2 - 15c) + 2(10a - 7w_2 + 2w_1) + 2(10a + 8w_2 + 2w_1 - 15c) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 50a - 56w_1 + 16w_2 - 56w_1 - 14w_2 - 14w_2 + 4w_1 + 16w_2 + 4w_1 + 75c = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 50a - 104w_1 + 4w_2 + 75c = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi_M}{\partial w_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(10a - 7w_1 + 2w_2) + 2(10a + 8w_1 + 2w_2 - 15c) + 8(10a - 7w_2 + 2w_1) - 7(10a + 8w_2 + 2w_1 - 15c) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 50a - 14w_1 + 4w_2 + 16w_1 + 4w_2 - 30c - 56w_2 + 16w_1 - 56w_2 - 14w_1 + 105c = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 50a + 4w_1 - 104w_2 + 75c = 0
\end{aligned}$$

On résoud le système :

$$\left\{\begin{array}{c} 50a-104w_1+4w_2+75c=0 \\ 50a+4w_1-104w_2+75c=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 50a-104w_1+4w_2+75c=0 \\ -104w_1-4w_1+4w_2+104w_2=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 50a+75c=104w_1-4w_2 \\ 108w_2=108w_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 50a+75c=100w_1 \\ w_2=w_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} w_1=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}c \\ w_2=w_1 \end{array}\right\}$$

$$F_1=\left(\frac{10a-7w_1+2w_2}{15}\right)^2=\left(\frac{10a-5\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}c\right)}{15}\right)^2=\left(\frac{\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}c}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}c\right)^2=\frac{1}{4}\left(a-\frac{c}{2}\right)^2$$

On reporte les expressions de w_1 et de w_2 dans les prix de vente :

$$p_2=p_1=\frac{10a+8w_1+2w_2}{15}=\frac{2a+2w_1}{3}=\frac{2}{3}\left(a+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}c\right)=a+\frac{1}{2}c$$

Quantités vendues :

$$q_2=q_1=a-p_1+\frac{1}{2}p_2=a-\frac{1}{2}p_1=a-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}c\right)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}c$$

Question 4 (2 points) : Non, les contrats binômes sont optimaux (du point de vue de M). M utilise le prix de gros pour inciter les distributeurs à fixer optimalement les prix de vente des biens et il utilise les paiements fixes pour capter l'intégralité des profits. M dispose de deux instruments, ce qui est suffisamment pour atteindre les deux objectifs qu'il poursuit.

Pour le vérifier (mais, ce n'est pas nécessaire), on peut rechercher le comportement d'une firme intégrée.

$$\pi_I=(p_1-c)\left(a-p_1+\frac{1}{2}p_2\right)+(p_2-c)\left(a-p_2+\frac{1}{2}p_1\right)$$

Prix choisis :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial \pi_I}{\partial p_1}=0 \\ \frac{\partial \pi_I}{\partial p_2}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-p_1+\frac{1}{2}p_2-p_1+c+\frac{1}{2}(p_2-c)=0 \\ \frac{1}{2}(p_1-c)+a-p_2+\frac{1}{2}p_1-p_2+c=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-2p_1+p_2+c-\frac{1}{2}c=0 \\ a-2p_2+p_1+c-\frac{1}{2}c=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-2p_1+p_2+\frac{1}{2}c=0 \\ -2p_1+2p_2+p_2-p_1=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2p_1=a+p_2+\frac{1}{2}c \\ 3p_2=3p_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2p_1=a+p_1+\frac{1}{2}c \\ p_2=p_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} p_1=a+\frac{1}{2}c \\ p_2=a+\frac{1}{2}c \end{array}\right\}$$

Les prix de la structure intégrée sont biens identiques aux prix déterminés dans la question précédente.

Question 5 (Hors barème) (5 points) : On considère le contrat passé entre M et D2 comme fixé, avec $w_2=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}c$ et $F_2=\frac{1}{4}\left(a-\frac{c}{2}\right)^2$, et on recherche le contrat avec tarification binôme qui permet de maximiser les profits joints de M et de D1.

$$\Pi=(p_1-w_1)q_1-F_1+(w_1-c)q_1+F_1+F_2=(p_1-c)q_1+F_2=(p_1-c)\left(a-p_1+\frac{1}{2}p_2\right)+F_2$$

avec

$$p_1 = \frac{10a + 8w_1 + 2w_2}{15} \quad ; \quad p_2 = \frac{10a + 2w_1 + 8w_2}{15} \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}c$$

D'où :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{10a + 8w_1 + 2w_2}{15} = \frac{10a + 8w_1 + 2\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}c\right)}{15} = \frac{11a + 8w_1 + \frac{3}{2}c}{15} \\
p_2 &= \frac{10a + 2w_1 + 8w_2}{15} = \frac{10a + 2w_1 + 8\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}c\right)}{15} = \frac{14a + 2w_1 + 6c}{15}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\Pi &= \left(\frac{11a + 8w_1 + \frac{3}{2}c}{15} - c\right)\left(a - \frac{11a + 8w_1 + \frac{3}{2}c}{15} + \frac{1}{2}\frac{14a + 2w_1 + 6c}{15}\right) + F_2 \\
&= \frac{11a + 8w_1 + \frac{3}{2}c - 15c}{15} \times \frac{15a - 11a - 8w_1 - \frac{3}{2}c + 7a + w_1 + 3c}{15} + F_2 = \\
&= \frac{11a + 8w_1 - \frac{27}{2}c}{15} \times \frac{11a - 7w_1 + \frac{3}{2}c}{15} + F_2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{15} \times \frac{11a - 7w_1 + \frac{3}{2}c}{15} - \frac{11a + 8w_1 - \frac{27}{2}c}{15} \times \frac{7}{15} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 88a - 56w_1 + 12c - 77a - 56w_1 + \frac{189}{2}c = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 11a - 112w_1 + \frac{213}{2}c = 0 \Leftrightarrow 112w_1 = 11a + \frac{213}{2}c \Leftrightarrow w_1 = \frac{11a + \frac{213}{2}c}{112}
\end{aligned}$$

On compare cette valeur de w_1 avec celle trouvée à la question 3 :

$$\frac{11a + \frac{213}{2}c}{112} < \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}c \Leftrightarrow 11a + \frac{213}{2}c < 56a + 84c \Leftrightarrow 0 < 45a - \frac{45}{2}c \Leftrightarrow 0 < 45\left(a - \frac{1}{2}c\right)$$

M propose à D1 un nouveau contrat avec un prix de gros unitaire w_1 plus faible. Ce coût d'approvisionnement plus faible va permettre à D1 de gagner des parts des marchés au détriment de D2 et d'augmenter ses profits. M augmente F_1 pour capter l'augmentation des profits de D1. D2 se retrouve avec des profits strictement négatifs. La firme D2 anticipe cette renégociation et va rejeter le contrat initial.

On calcule les profits des distributeurs pour le vérifier. On doit préalablement calculer les prix de vente :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{11a + 8w_1 + \frac{3}{2}c}{15} = \frac{11a + 8\left(\frac{11a + \frac{213}{2}c}{112}\right) + \frac{3}{2}c}{15} = \frac{1232a + 88a + 852c + 168c}{15 \times 112} = \frac{1320a + 1020c}{15 \times 112} \\
&= \frac{132a + 102c}{3 \times 56} = \frac{44a + 34c}{56} = \frac{22a + 17c}{28} = \frac{88a + 68c}{112} \\
p_2 &= \frac{14a + 2w_1 + 6c}{15} = \frac{14a + 2\left(\frac{11a + \frac{213}{2}c}{112}\right) + 6c}{15} = \frac{14 \times 112a + 22a + 213c + 6 \times 112c}{15 \times 112} \\
&= \frac{1590a + 885c}{15 \times 112} = \frac{106a + 59c}{112} > p_1
\end{aligned}$$

Quantités vendues :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= a - p_1 + \frac{1}{2}p_2 = a - \frac{88a+68c}{112} + \frac{1}{2}\frac{106a+59c}{112} = \frac{112a-88a-68c+53a+\frac{59}{2}c}{112} = \frac{77}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) \\
q_2 &= a - p_2 + \frac{1}{2}p_1 = a - \frac{106a+59c}{112} + \frac{1}{2}\frac{88a+68c}{112} = \frac{112a-106a-59c+44a+34c}{112} = \frac{50a-25c}{112} \\
&= \frac{50}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) = \frac{25}{56}\left(a-\frac{c}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Profits des distributeurs :

$$
\begin{aligned}
\pi_{D1} &= (p_1 - w_1)\, q_1 - F_1 = \left(\frac{88a+68c}{112} - \frac{11a+\frac{213}{2}c}{112}\right)\frac{77}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) - F_1 \\
&= \left(\frac{77a-\frac{77}{2}c}{112}\right)\frac{77}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) - F_1 = \left(\frac{77}{112}\right)^2\left(a-\frac{c}{2}\right)^2 - F_1 \\
\pi_{D2} &= (p_2 - w_2)\, q_2 - F_2 = \left(\frac{106a+59c}{112} - \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}c\right)\frac{50}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) - F_2 \\
&= \left(\frac{106a-56a+59c-84c}{112}\right)\frac{50}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) - F_2 = \frac{50a-25c}{112}\frac{50}{112}\left(a-\frac{c}{2}\right) - F_2 \\
&= \left(\frac{50}{112}\right)^2\left(a-\frac{c}{2}\right)^2 - F_2
\end{aligned}
$$

Dans la question 3, on avait :

$$
\pi_{D2} = \pi_{D1} = \frac{1}{4}\left(a-\frac{c}{2}\right)^2 - F_1
$$

$\left(\frac{50}{112}\right)^2 < \frac{1}{4}$, π_{D2} a diminué et est devenu strictement négatif. $\left(\frac{77}{112}\right)^2 > \frac{1}{4}$, π_{D1} a augmenté, M peut augmenter F_1 sans que D1 refuse de signer le contrat. Le profit de M, hors paiement fixe, a aussi changé car (1) w_1 est plus faible et (2) les quantités achetées par les deux distributeurs ont changé.