DECISION ET POUVOIR DANS LES STRUCTURES FEDERALES

Les mathématiques des élections indirectes

Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin, Jean-Louis Rouet

L'élection présidentielle américaine de 2000 restera dans l'histoire non seulement à cause des polémiques sur le décompte des voix en Floride, mais aussi parce qu'elle est l'exemple typique d'un phénomène paradoxal : George Bush fut élu président alors qu'il avait recueilli moins de suffrages que son adversaire à l'échelle du pays (50 456 062 voix contre 50 996 582 pour Al Gore). Une telle situation peut se produire à chaque fois que le mode scrutin est indirect. Contrairement aux électeurs français, les électeurs américains n'élisent pas directement leur président, mais votent dans chacun des 51 états pour élire les 538 délégués d'un collège électoral qui désignera *in fine* le vainqueur. Le candidat arrivant en tête dans un état remportant tous les « grands électeurs » de celui-ci, gagner dans le plus grand nombre d'états est la clef du succès. C'est ce que fit G. Bush en 2000, en remportant 30 états (dont la Floride et ses 25 grands électeurs avec une avance minime de 531 voix) pour un total de 271 grands électeurs, contre 21 états et 267 grands électeurs pour Gore. Peu de commentateurs ont remarqué qu'une autre subtilité du mode de scrutin américain avait joué un rôle capital dans cette victoire. Chaque état est en effet représenté par un nombre de délégués égal à son nombre de représentants à la chambre (strictement proportionnel à sa population, aux arrondis près) auquel on ajoute deux, qui est le nombre de sénateurs par état. Ainsi, un petit état sera toujours représenté par au moins 3 grands électeurs, quand la Californie, l'état le plus peuplé, en désigne 55. Si le nombre de délégués avait été strictement proportionnel aux populations, sans ajout de la prime de deux grands électeurs par état, Bush n'aurait bénéficié du soutien que de $271-2*30= 211$ voix dans le collège électoral, contre $267-21*2 = 235$ pour Gore. Autrement dit, une détermination sans biais du poids des états aurait donné ce qu'il est permis de considérer comme le « bon » résultat !

Choix collectif et structures fédérales

Les français ne sont guère familiarisés avec les problèmes que pose le fonctionnement démocratique des structures de type fédéral et les modes de scrutin indirects comme celui que nous venons d'évoquer. Les choses pourraient cependant évoluer rapidement avec la mise en place et le rôle accru des régions, l'émergence des structures intercommunales et, surtout, la construction de l'Union Européenne.

D'une manière générale, les structures fédérales peuvent se définir comme des regroupements d'entités politiques (communes, régions, états) au départ indépendantes et souveraines qui, réalisant que sur certains points une politique commune serait plus efficace, consentent à abdiquer une partie de leur souveraineté et à se soumettre aux décisions de la structure qui les fédère. La première difficulté que doit affronter toute structure de ce type pour fonctionner concerne la question du choix collectif : sur les sujets du ressort de la fédération, *comment doit-on trancher en cas de désaccords* ? Autrement dit, *quelle méthode de décision collective convient-il d'adopter* ?

L'objet de cet article est de montrer que l'*approche scientifique* des systèmes de vote, développée depuis la fin des années 1940 par des statisticiens, des théoriciens des jeux, des mathématiciens et des économistes, est susceptible d'éclairer utilement cette question fondamentale, en apportant des éléments objectifs dans un débat comme celui qui concerne actuellement certains aspects de la constitution européenne.

Précisons quelque peu le problème étudié dans ce texte. Les décisions « fédérales » sont généralement prises au sein d'un organe (Conseil des ministres de l'UE, collège électoral américain, Conseil intercommunal, instances internationales comme l'ONU ou le FMI …) que nous appellerons *Conseil* dans ce qui suit. Sans perte de généralité, nous parlerons le plus souvent d'*états* pour désigner les membres de la structure fédérale. Les états sont le plus souvent de tailles très différentes. Faut-il donner à chacun d'entre eux un poids différent dans le processus de décision collective ? La difficulté vient ici du fait que toute structure fédérale repose sur une double légitimité : c'est à la fois une *union d'états* et une *union de citoyens*. La première légitimité, celle des états, conduit naturellement au principe « un état - une voix » ; la seconde, celle des citoyens, requiert un égal pouvoir de chaque citoyen dans le processus de décision collective, ce qui implique que les états (de tailles différentes en termes de population) aient des poids différents au sein du Conseil. L'histoire des institutions européenne montre que les règles de décision en vigueur au sein du Conseil des ministres ont eu tendance à privilégier la légitimité des citoyens[1] et la même constatation peut s'appliquer aux structures intercommunales françaises[2] (le nombre de délégués attribué à chaque commune dépend généralement de la taille de la commune). Le problème posé au scientifique est alors le suivant : *quels poids* (exprimés en termes de votes, de mandats ou bien encore de représentants si l'on fait l'hypothèse que les représentants d'un même état votent en bloc) *faut-il attribuer à chaque état ?*

Trois critères pour évaluer les systèmes de vote.

Formellement, un système de vote au sein d'un Conseil réunissant N états est noté ($Q\ ;a_1,a_2, ...,a_N$), expression dans laquelle a_i désigne le poids du pays i et Q le nombre de votes qu'il faut réunir pour qu'une proposition soit acceptée (le quorum). Du point de vue du citoyen, un système de vote sera considéré comme *juste* si les poids attribués aux différents états (les a_i) donnent à chaque citoyen de l'union fédérale un même pouvoir de vote, c'est-à-dire la même probabilité d'influencer le résultat final. On dira qu'un électeur est pivot, ou décisif, si, en changeant d'opinion, il fait basculer le scrutin. La notion d'indice de pouvoir, que nous développerons plus loin, va ainsi permettre de juger du caractère plus on moins équitable d'une règle de décision collective au sein du Conseil. A titre d'exemple, l'encadré 1 montre que lors de la création de la communauté européenne en 1958, le pouvoir du Luxembourg (et donc de ses citoyens) était nul !

Ce principe d'équité ne constitue pas pour autant le seul critère susceptible d'évaluer un système de vote donné. Un deuxième critère est lié à l'*efficacité* du système considéré, c'est-à-dire à son aptitude à prendre des décisions : si à chaque fois qu'une proposition est présentée, le vote est négatif (proposition rejetée), le système est évidemment inefficace. Le risque de paralysie d'un système de vote est étroitement lié à la valeur du quorum (Q) mais dépend aussi des poids des états ; il peut être mesuré par la probabilité de blocage que l'on obtient en considérant parmi toutes les configurations de vote possibles celles qui conduisent au rejet de la proposition soumise au vote. On notera que, parmi les nombreuses critiques qui ont accueilli les règles de décision collective proposées dans le traité de Nice (qui régit le mode de fonctionnement actuel du Conseil des ministres dans l'Europe des 25), figuraient le risque de blocage du système. Il est possible d'évaluer objectivement, en termes probabilistes,

[1] Voir A. Laruelle et M. Widgren, Is the allocation of voting power among the EU states fair ? *Public Choice* 94, p. 317-339 (1998).

[2] Voir J. Bonnet et alii, La détermination du nombre de délégués dans les structures intercommunales, *Revue d'Economie Régionale et Urbaine* 2, p. 259-282 (2004).

le risque de paralysie d'un système de vote (ou, ce qui revient au même, sa capacité d'agir, mesurée par la probabilité complémentaire).
Un dernier critère possible pour évaluer le système de vote d'un Conseil fédéral concerne sa capacité à traduire *fidèlement* l'opinion de la majorité des citoyens de l'union. Il peut en effet arriver que la décision prise par le Conseil (conformément au système de vote en vigueur) soit en contradiction avec le point de vue de la majorité des citoyens. C'est le *paradoxe du referendum*, bien connu en théorie du vote, et dont l'élection de George Bush évoquée plus haut est le parfait exemple. L'existence même du phénomène n'est pas directement liée au fait que l'on attribue des poids différents à chacun des états : il suffit pour qu'il se produise que le point de vue de la majorité des états (disposant tous d'un même poids) soit en contradiction avec celui de la majorité des électeurs de la fédération. La fréquence de ce type de conflit varie cependant selon la pondération que l'on attribue à chacun des états membres de la fédération. De ce point de vue, un bon système de vote sera celui qui minimise la probabilité du conflit.

Il apparaît ainsi que les trois critères proposés débouchent tous sur une mesure de nature probabiliste : degré d'influence d'un citoyen sur la décision prise (critère d'équité), risque de paralysie du système (critère d'efficacité) et fréquence des conflits entre le vote populaire et le vote des états (critère de fidélité). L'évaluation d'un système de vote passe donc par la définition préalable d'un modèle probabiliste susceptible de représenter correctement le comportement des électeurs.

Encadré 1

Le système de vote au sein du Conseil des ministres de l'Europe des six avait les caractéristiques suivantes : chacun des « grands » états (Allemagne, France et Italie) disposait de 4 votes, la Belgique et la Hollande de 2 votes (chacun) et le Luxembourg d'1 vote ; une proposition, pour être acceptée, devait recueillir au moins 12 votes. Il est facile de montrer que le Luxembourg n'a aucune influence sur le résultat d'un vote dans un tel système. Notons B, H et L les trois pays du Benelux. Si les trois grands états votent pour une proposition, celle-ci est adoptée quels que soient les vote de B, H et L. Si deux grands pays sont pour, le troisième étant contre, alors la proposition est adoptée si et seulement si B et H votent pour et le vote de L n'a pas d'influence. Enfin, si un seul (ou aucun) des grands états (n')est favorable à la proposition, elle est rejetée quels que soient les votes de B, H et L. Par conséquent, dans aucun des cas considérés, le vote de L ne joue un rôle. On dit que son *pouvoir de vote* est nul, bien que son *poids* ne le soit pas. Cette anomalie a été corrigée lorsque l'Europe s'est élargie : le pouvoir de vote du Luxembourg est devenu non nul dans l'Europe des neuf et l'est demeuré par la suite.

Lionel Penrose, le pionnier.
Le modèle le plus simple et le plus utilisé en théorie du vote a été introduit en 1946 par le mathématicien et professeur de génétique Lionel Penrose (père du célèbre astrophysicien Roger Penrose, dont les travaux révolutionnèrent l'étude des trous noirs dans les années 1960 et 1970). Dans un article consacré au système de décision collective qu'il conviendrait d'utiliser aux Nations Unies[3], Penrose présente une approche conduisant à un premier indice

[3] L. Penrose, The elementary statistics of majority voting, *Journal of the Royal Statistical Society* 109, p.53-57 (1946).

de pouvoir bien connu, l'indice de Banzhaf (du nom du juriste qui l'a redécouvert une vingtaine d'années plus tard et l'a popularisé). Dans ce modèle, on se propose d'étudier un système de vote *a priori*, sans rien savoir des différentes opinions de chacun ; cette démarche se justifie si l'on estime que les qualités d'un mode de scrutin doivent être évaluées indépendamment des contingences d'un contexte politique précis. Dès lors, il est permis de supposer, comme le fait Penrose, que chaque votant vote indépendamment des autres avec une équiprobabilité de voter pour (*P*) ou contre (*C*) une proposition. Tout se passe comme si chaque votant décidait à pile ou face de voter *P* ou *C*. Le modèle est donc basé sur l'hypothèse d'*indépendance* des électeurs. Dans ces conditions, les 2^N configurations possibles que l'on obtient avec *N* états sont équiprobables et le pouvoir d'un état est obtenu en divisant par 2^N le nombre de configurations où il occupe une position de « pivot », c'est-à-dire une position lui permettant, en changeant son vote, de faire basculer la décision collective : telle est la définition de l'indice de Banzhaf, dont le mode de calcul est illustré dans l'encadré 2.

Encadré 2

L'exemple proposé est celui d'une structure intercommunale bas-normande constituée de trois communes A, B et C, respectivement représentées par 7, 5 et 3 délégués au sein du Conseil intercommunal ; pour les décisions courantes, le quorum est de 8 voix ; cependant, pour certaines décisions importantes, les deux tiers des voix (soit Q=10) sont exigées. C'est le contexte que nous privilégierons dans cette illustration. Nous ferons en outre l'hypothèse que les délégués d'une même commune votent systématiquement de la même façon : le système de vote analysé s'écrit donc symboliquement (10 ; 7, 5, 3). Il y a ici $2^N = 2^3 = 8$ configurations de vote. Dans chacune d'elles (colonnes), les communes *pivots* figurent en caractère gras.

Alphonseville (7)	**P**	**P**	**P**	P	**C**	**C**	**C**	C
Bourg sur Mer (5)	P	**P**	C	**C**	P	P	C	C
Château du Bocage (3)	P	C	**P**	**C**	P	C	P	C
Total	15	12	10	7	8	5	3	0

Une commune est qualifiée de *pivot* lorsqu'en changeant son vote, elle change la décision collective. Par exemple, dans la première configuration, A est pivot : si elle vote *C* au lieu de *P*, la proposition ne recueille plus que 8 voix et elle est rejetée puisque 10 voix sont nécessaires (Q=10). Sur les 8 configurations, A est 6 fois pivot. Son indice de Banzhaf est donc de 6/8=3/4. B et C sont 2 fois pivots et obtiennent un indice de Banzhaf de 2/8=1/4. Le pouvoir est ainsi partagé dans les proportions 3 : 1 : 1. Le lecteur vérifiera aisément que si les décisions sont prises à la majorité simple (Q=8), alors A, B et C obtiennent le même pouvoir de vote en dépit de leurs différences de poids.

A l'aide de ce modèle probabiliste et de l'indice de Banzhaf, il est possible d'éclairer la question de la pondération des états permettant de garantir que chaque citoyen de l'union fédérale dispose d'un même pouvoir de vote : il faut pour satisfaire à ce critère d'équité *fixer le poids de chaque état au sein du Conseil proportionnellement à la racine carrée de sa population*[4]. L'explication est la suivante : supposons que les états prennent leur décision sur

[4] Ce principe figure dans l'article seminal de L. Penrose. Pour une présentation "moderne" de ce résultat, voir Baldwin et M. Widgren, in *Reasoned Choices*, ed. by Matti Wiberg, The Finnish Political Science Association, p.42-92 (2004).

la base d'un referendum, organisé dans chaque état. L'influence qu'un citoyen peut avoir sur la décision finale prise par le Conseil est alors le produit de deux probabilités : la probabilité que le citoyen occupe une position de pivot lors du referendum et la probabilité que son état soit pivot au sein du Conseil.

Probabilité qu'un individu de l'état i soit pivot dans la fédération sous l'hypothèse d'indépendance
=
Probabilité qu'il soit pivot dans son état $*$ Probabilité que l'état i soit pivot.

Il est clair que le pouvoir d'un citoyen lors du referendum dépend de la taille n_i de la population de son état. Précisément, un citoyen sera décisif (ou pivot) si les n_i-1 autres électeurs se répartissent en deux sous-ensembles égaux (nous supposons ici n impair) ; sous l'hypothèse d'indépendance, la probabilité d'un tel événement s'écrit :

$$[(n_i-1)\,!\,/\,((n_i-1)/2)\,!\,((n_i-1)/2)\,!\,]\,/\,2^{ni-1}.$$

En remplaçant les factorielles par l'approximation de Strirling, on obtient après simplification $(2/\pi n_i)^{1/2}$. Le résultat est identique pour n pair. Qu'en est-il maintenant de la probabilité qu'un état soit pivot ? Dans l'hypothèse où le nombre d'états est suffisamment élevé, où aucun état ne domine outrageusement les autres en terme de mandats, des simulations[5] ont confirmé l'intuition de Penrose selon laquelle le pouvoir d'un état devient approximativement égal à son poids a_i (en termes relatifs). Le résultat recherché est alors le suivant :

Probabilité qu'un individu de l'état i soit pivot dans la fédération sous l'hypothèse d'indépendance $\approx \dfrac{a_i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n_i}}$.

Pour que les citoyens de la fédération disposent tous du même degré d'influence, il faut donc fixer les poids proportionnellement à la racine carrée de la population. Il est intéressant de constater que, dans l'Union européenne, ce principe a toujours été plus ou moins respecté, non en raison de la justification théorique que nous venons de mentionner, mais sans doute parce qu'il apparaissait comme une sorte de compromis entre la légitimité des états (même pouvoir pour chaque état) et celle des citoyens, intuitivement (mais abusivement, si l'on en croit le modèle de Penrose) assimilée à un pouvoir proportionnel à la population de l'état.
Ce même modèle permet aussi de calculer aisément la probabilité de passage d'une proposition. Nous obtenons dans l'exemple de l'encadré 2 une probabilité de 3/8 avec Q=10 (chaque configuration est équiprobable et trois d'entre elles permettent d'atteindre le quorum). Notons qu'en prenant un seuil Q=8, la probabilité de voir une proposition approuvée est de ½. Il s'agit là d'un résultat général : pour un quorum correspondant à la moitié du total des poids, une proposition a une chance sur deux d'être acceptée. On montre assez facilement que, si N est suffisamment grand et si l'on exige un quorum qui s'éloigne de la moitié du total des mandats, alors le modèle utilisé prédit un pourcentage d'approbation tendant rapidement vers 0. Ainsi pour N=27, on obtient avec les poids prévus par le traité de Nice et un quorum de 255 (sur un total de 354) une probabilité d'approbation de 2% … et donc un risque de paralysie de 98% ! On peut illustrer ce résultat grâce au jeu de pile ou face, qui est décrit par le même modèle mathématique que celui que nous venons d'évoquer : supposez que pour gagner un prix, il vous faille amener pile 7 fois ou plus lors de 10 jets successifs ; vos chances de gagner ne sont pas négligeables (environ 17%). Si en revanche on

[5] Chang P-L., V.C.H. Chua and M. Machover M., L S Penrose's limit theorem: Test by simulation. Mathematical Social Scienes 51, p90-106, 2006.

vous demande de sortir 70 fois pile sur 100 tirages, refusez de jouer : votre chance est infinitésimale.

Cet exemple du jeu de pile ou face souligne clairement les caractéristiques et les limites du modèle probabiliste utilisé : il décrit un électorat totalement indécis, tel qu'on pourrait le trouver au début d'une campagne électorale opposant des candidats inconnus des électeurs. L'électeur -individuellement- et l'électorat -collectivement- sont alors indécis et cette indécision peut se prolonger jusqu'au moment du vote si les deux candidats sont équivalents et si la campagne électorale ne permet pas de faire apparaître un biais en faveur de l'un ou l'autre. Un tel contexte est évidemment rare et la pertinence du modèle d'indépendance peut être (et a été) mise en cause et conduire les politiques à rejeter les tentatives de modélisation. Moberg, un diplomate suédois, souligne ainsi dans un article récent[6] que les conditions décrites par les modèles probabilistes (en fait, l'hypothèse d'indépendance et sa probabilité d'approbation de 2%) n'ont rien à voir avec les modalités de prise de décision au sein du Conseil des ministres de l'UE, faites de discussions informelles, de tours de table préliminaires, de compromis etc …

Un autre modèle : l'indice de Shapley-Shubik

Il se trouve qu'un autre modèle, dû au théoricien des jeux Lloyd Shapley et au politologue Martin Shubik, est disponible en théorie du vote depuis 1952. Curieusement, ce modèle a longtemps été le plus connu, car Lionel Penrose n'avait pas réussi à populariser ses analyses avant que John Banzhaf ne redécouvre son indice. A l'inverse, Shapley et Shubik ont fait partie, avec John von Neumann, Oscar Morgenstern ou John Nash, des pionniers de la théorie des jeux, et c'est par ce canal que la théorie des indices de pouvoir s'est imposée. Comme le précédent, le modèle de Shapley-Shubik peut être décrit à l'aide d'un jeu de pile ou face. Là encore, chaque votant va tirer sa décision à pile ou face, mais la pièce utilisée lors d'un vote aura été préalablement choisie dans un ensemble de pièces dont la probabilité d'amener pile (vote en faveur de la proposition) n'est pas nécessairement 1/2, par exemple 5 pièces ayant comme probabilité d'obtenir pile 4/5, 2/3, 1/2, 1/3, 1/5 respectivement. Les pièces 4/5 (respectivement 1/5) décrivent des situations où les tenants de (opposants à) la proposition ont été particulièrement actifs et ont rallié à leur point de vue 4/5 des votants. Et cela arrive deux fois sur cinq si la pièce est tirée au hasard. De la même façon, les pièces 2/3 et 1/3 décrivent des situations ou le pourcentage de ralliés est un peu plus faible, tandis que la pièce 1/2 décrit un électorat indécis, comme dans le modèle d'indépendance, mais ce cas ne se présente maintenant qu'une fois sur cinq. Supposons maintenant qu'au lieu de cinq pièces, on en ait un grand nombre, chacune d'elle étant associée à une probabilité p d'amener pile. On obtient l'hypothèse dite d'*homogénéité* en supposant que la probabilité p est uniformément distribuée sur l'intervalle [0,1]. On considère ainsi qu'il y a autant de chances d'avoir p compris entre 0,4 et 0,5 (par exemple) qu'entre 0,8 et 0,9. Le choix d'une distribution uniforme, qui n'est pas plus arbitraire que de poser $p=1/2$ (hypothèse d'indépendance), présente bien sûr l'avantage de simplifier considérablement les calculs, comme expliqué dans l'encadré 3. On notera que ce modèle donne une probabilité significative aux configurations ne conduisant pas à un résultat proche de 50/50. Pour une élection donnée, la société peut clairement choisir Pour ou Contre, ce qui se traduit par une valeur de p (*a priori* différente de ½) qui traduit la tendance de l'électorat et qui s'impose à chacun ; c'est en ce sens qu'il faut entendre le qualificatif d'*homogène* associé au modèle de Shapley-Shubik. La détermination de p est ici censée rendre compte du processus de négociation, des débats et discussion qui accompagnent chaque élection. Le modèle reste cependant un modèle *a priori* du comportement électoral puisque, en moyenne, l'électorat n'est pas plus enclin à voter P que C.

---

[6] A. Moberg. The Nice treaty and voting rules in the Council. *Journal of Common Market Studies* 40, 259-282 (2002).

Encadré 3

Calculons à l'aide de l'hypothèse d'homogénéité la probabilité des 2^N configurations possibles dans un vote *P* ou *C* avec *N* votants. Pour *p* donné, *i.e.* dans un vote particulier, la probabilité d'obtenir *x* fois *P* et *N-x* fois *C* s'écrit $p^x(1-p)^{N-x}$. Sur un grand nombre de votes, cette configuration a une fréquence égale à $\int_0^1 p^x(1-p)^{N-x}\, dp$ puisque *p* est supposé uniformément distribué sur [0,1]. Le calcul de cette intégrale donne

$$x!(N-x)!/(N+1)N! \quad (1)$$

Si l'on remarque qu'il y a $N!/(x!(N-x)!)$ configurations avec *x* votants *P* et *N-x* votants *C*, on voit que la probabilité d'avoir *x* = 0, 1, 2, …, *N* votes *P* est égale à $1/(N+1)$, quelle que soit la valeur de *x*. Ainsi, la probabilité d'avoir 2 *P* dans un vote où 3 états interviennent est-elle donnée par le produit du nombre de configurations de ce type (3! / (2! 1!) = 3) par la probabilité d'une telle configuration ((2! 1!) / 4 3! = 1/12), ce qui donne 3/12=1/4. On calculerait de la même façon que les probabilités d'obtenir 0 *P,* 1 *P* ou 3 *P* sont elles aussi égales à ¼. Il s'agit là d'une propriété caractéristique et importante de l'hypothèse d'homogénéité. Il en résulte par exemple que la probabilité d'avoir plus de 70 *P* (ou *pile*) sur 100 votants (jets) est de 30/101 (contre 2% avec l'hypothèse d'indépendance).
Calculons à l'aide de ce modèle le pouvoir de vote des différentes communes de l'exemple considéré dans l'encadré 2. Pour le même quorum (*Q*=10) et les mêmes nombres de délégués (soit 7, 5 et 3) pour A, B et C, la seule chose à modifier lorsque l'on passe de l'hypothèse d'indépendance à celle d'homogénéité est la probabilité qu'il faut donner aux différentes configurations. On passe de la valeur 1/8 obtenue sous l'hypothèse d'indépendance pour chacune de ces configurations aux valeurs qui résultent de l'application de la formule (1) ci-dessus. Il ressort de ce calcul que les configurations unanimes (3 *P* ou 3 *C*) ont une probabilité égale à 1/4 alors que toutes les autres ont une probabilité de 1/12. La probabilité que la commune A soit pivot (son indice de pouvoir) est alors de ¼ + 5(1/12) = 2/3 ; B et C ont quant à elles un indice de pouvoir égal à 1/12 + 1/12 = 1/6.

L'indice de pouvoir calculé avec l'hypothèse d'homogénéité a été introduit par Shapley et Shubik à l'aide d'un scénario plus complexe et peu vraisemblable au premier abord. C'est essentiellement pour cette raison que la plupart des analyses du pouvoir de vote se fondent actuellement sur l'indice de Banzhaf-Penrose, plus simple à calculer et à illustrer que celui de Shapley-Shubik, même si l'hypothèse d'homogénéité peut sembler plus réaliste.

Voyons maintenant ce que donne l'hypothèse d'homogénéité lorsqu'on l'applique à l'évaluation d'un système de vote indirect tel que ceux que l'on considère dans cet article. Les résultats obtenus confirment-ils ceux que l'on avait déduits du modèle d'indépendance ? La réponse est malheureusement négative. Concernant le problème de l'équité, on obtient le résultat suivant :

Probabilité qu'un individu de l'état *i* soit pivot dans la fédération sous hypothèse d'homogénéité =

Probabilité qu'il soit pivot dans son état $*$ Probabilité que l'état *i* soit pivot $\approx \dfrac{a_i}{n_i}$

Par conséquent, chaque citoyen obtiendra un pouvoir de vote identique si les poids au sein du Conseil sont *proportionnels à la population des états* (et non plus à la racine carrée de ces populations). Cela résulte du fait qu'avec l'hypothèse d'homogénéité, le pouvoir du citoyen d'un état de population n_i dans un référendum est égale à $1/n_i$ puisque la probabilité qu'il soit pivot est la probabilité d'obtenir exactement $(n_i\text{-}1)/2$ *P* parmi les n_i-1 autres votants et nous avons vu (Encadré 3) que celle-ci est égale à $1/n_i$. D'autre part, avec l'hypothèse d'homogénéité, la probabilité qu'un état soit pivot reste approximativement proportionnelle à son nombre de mandats (a_i). D'où le résultat. Dans le contexte européen, cela signifie qu'un pays de 60 millions d'habitants devrait avoir au Conseil des ministres de l'UE un poids 6 fois supérieur à celui d'un pays de 10 millions d'habitants, alors que la règle de la racine carrée fondée sur le modèle d'indépendance conduit à un rapport de 1 à $\sqrt{6}$=2,45.

Une autre quantité intéressante est la probabilité d'adoption d'une décision. Dans l'exemple de l'encadré 2, cette probabilité passe de 3/8=0,375 avec l'hypothèse d'indépendance à 5/12=0,417 avec le modèle de Shapley et Shubik. Remarquons que cette augmentation deviendra de plus en plus importante au fur et à mesure qu'augmente le nombre de votants. Un résultat important précise que, si l'hypothèse d'indépendance prédit le blocage du système (probabilité d'adopter une proposition quasi nulle) dès que le quorum exigé s'éloigne des 50%, l'hypothèse d'homogénéité donne en revanche un taux de blocage fini même avec un nombre élevé d'états. Ce taux de blocage est de l'ordre de $q = Q/\sum a_i$ si N est suffisamment grand. En appliquant ce résultat au traité de Nice, qui prévoit un seuil de 72% pour qu'une proposition soit approuvée, on obtient un taux d'approbation d'environ 28% (à comparer au taux de 2% obtenu avec le modèle précédent).

La probabilité du paradoxe du referendum.

L'application du critère d'équité entre les votants donne deux solutions bien différentes selon que l'on modélise le mode de scrutin fédéral par l'hypothèse d'indépendance ou l'hypothèse d'homogénéité. Qu'en est-il lorsque l'objectif n'est pas de donner une influence égale à chacun, mais plutôt de minimiser la probabilité d'élire un candidat qui remporterait une majorité des mandats sans obtenir la majorité des suffrages dans la fédération ? Pour répondre à cette question nous avons réalisé plusieurs séries de simulations en tirant aléatoirement à chaque fois un grand nombre d'élections selon les hypothèses d'homogénéité et d'indépendance[7]. Plus précisément, nous avons supposé que le nombre de mandats d'un pays de population n_i était donné par la loi $a_i = n_i^{\alpha}$. Bien que ne couvrant pas tous les cas, cette loi permet d'étudier, en faisant varier la valeur du paramètre α, les performances d'un grand nombre de systèmes de vote, parmi lesquels figurent le système fédéral pur (α=0), où chaque état n'est représenté que par un délégué quelle que soit sa population, la règle de la racine carré ($\alpha=1/2$) et la représentation proportionnelle ($\alpha=1$). Ces simulations ont permis d'établir que la fréquence du paradoxe du referendum est minimisée lorsque les nombres de voix attribués aux états sont proportionnels aux populations des états sous l'hypothèse d'homogénéité. C'est en revanche la règle de la racine carrée qui s'impose pour minimiser la probabilité du paradoxe lorsque le modèle probabiliste a priori repose sur l'hypothèse d'indépendance. Il est ici intéressant de constater que les critères d'équité et de fidélité conduisent, pour chacun des modèles étudiés, aux mêmes prescriptions.

Le projet de constitution européenne

L'analyse présentée jusqu'ici considère un processus de décision particulier : le vote majoritaire pondéré au sein d'un Conseil unique. C'est ce système qui a prévalu (sous divers avatars) dans l'Union européenne et qui continuera de prévaloir jusqu'en 2009. D'autres

[7] Feix et alii, Majority efficient representation of the citizens in a federal union, document de travail, Université de Caen (2006).

possibilités existent cependant pour prendre en compte la double légitimité qui caractérise les structures fédérales. Par exemple, un système à deux « conseils » peut permettre de concilier la logique des états et celle des citoyens, en les faisant tout simplement coexister : aux Etats-Unis d'Amérique, par exemple, un texte de loi doit être voté par deux assemblées, le Sénat et la Chambre des représentants ; chaque état élit deux sénateurs *quelle que soit sa population* mais envoie à la Chambre un nombre de représentants proportionnel à sa population[8]. Le Sénat représente ainsi la légitimité des états et la Chambre celle ces citoyens. Une autre possibilité consiste à introduire, dans le cadre d'un Conseil unique, un double seuil de majorité qualifiée. C'est la solution préconisée dans le projet de constitution européenne qui, supprimant les votes pondérés, définit dans son article I-25 la majorité qualifiée « comme étant égale à au moins 55% des membres du Conseil … représentant des Etats membres réunissant au moins 65% de la population de l'Union ».
Il est bien clair que l'on peut appliquer à ces systèmes la même approche scientifique que celle que nous avons développée plus haut. Considérons par exemple le type de règle préconisée par le projet de constitution européenne. Notons q_a et q_b les deux seuils (exprimés en pourcentage). Dans la mesure où l'un des objectifs majeurs de cette nouvelle règle est d'éviter les risques de blocage, il est intéressant de calculer la probabilité d'adoption d'une proposition en fonction des paramètres q_a et q_b. Dans un travail récent[9], les auteurs ont pu établir, dans le cadre de l'hypothèse d'homogénéité, que cette probabilité est donnée par

$$1\text{-}sup(q_a,q_b)$$

lorsque le nombre d'états est suffisamment élevé (et sous certaines « conditions de régularité »). Autrement dit, seul le seuil le plus élevé va influer sur la capacité d'agir du Conseil dans une Europe élargie. Etait-il utile, dans ces conditions, de préconiser des seuils distincts ?

Que conclure ?

Deux enseignements principaux émergent des analyses présentées dans cet article.

1) Il est impossible de faire des recommandations sur le choix d'un système de vote sans expliciter clairement un modèle de comportement des électeurs. On s'en convaincra aisément en notant que les arguments qui justifient l'emploi de la règle de la racine carrée dans le modèle de Penrose-Banzhaf (même influence de chaque citoyen sur la décision finale, fréquence de paradoxe minimisée) sont également valides pour une allocation proportionnelle des poids dans le modèle de Shapley-Shubik. Seule l'étude statistique des élections passées serait donc susceptible de trancher en faveur de tel ou tel modèle probabiliste. Les travaux récents de Gelman et alii[10], relatifs aux élections américaines ainsi qu'à certaines élections européennes, constituent un premier pas dans cette direction. On notera que les résultats obtenus par ces auteurs disqualifient l'hypothèse d'indépendance qui fonde le modèle de Penrose-Banzhaf. A défaut d'études reprenant ces analyses avec des hypothèses plus sophistiquées sur le comportement de long terme des électeurs, nous considérons qu'en l'état actuel des connaissances, il est préférable d'utiliser l'hypothèse d'homogénéité et l'indice de Shapley-Shubik plutôt que l'indice de Banzhaf. Une répartition des délégués proportionnelle à la population des états semble la solution la plus raisonnable, dans la mesure où le nombre d'états est suffisant grand (au moins une dizaine) et qu'aucun état ne domine outrageusement la fédération en terme de population. C'est le cas de l'Union européenne, des Etats-Unis d'Amérique, mais pas toujours celui des communautés de communes, où le poids excessif des villes centre pose problème.

---

[8] Voir Balinski et Young, *Fair Representation*, New Haven, Yale University Press (1982).

[9] M. Feix et alii, Probabilistic models for power indices and voting, document de travail, Université de Caen (2004).

[10] A. Gelman et alii, Standard voting power indexes don't work: an empirical analysis, *British Journal of Political Science* 34, p. 657-674 (2004).

2) L'approche scientifique des problèmes de décision collective est maintenant suffisamment développée pour pouvoir être prise en compte par les hommes politiques dans leurs choix constitutionnels (consulter les juristes ne suffit plus !). Les nombreux résultats obtenus au cours de ces dernières années (dont nous avons rendu très partiellement compte) prouvent de manière incontestable l'utilité d'une telle approche. En 2004, une cinquantaine de chercheurs et d'universitaires européens ont signé une lettre aux gouvernements des états membres de l'UE, réclamant que soient prises en considération les nombreuses contributions de la communauté scientifique au débat sur les institutions. Pour l'instant, cette juste requête n'a pas été, à notre connaissance, suivie d'effets. C'est pourtant, nous semble-t-il, à partir d'un dialogue entre politiques et scientifiques que pourront s'élaborer les systèmes de décision susceptibles de régir efficacement et démocratiquement le fonctionnement des structures fédérales.

<u>Pour en savoir plus :</u>

- N. Andjiga, F. Chantreuil et D. Lepelley, La mesure du pouvoir de vote, *Mathématiques et Sciences Humaines* 163, 11-145 (2003)
- F. Bobay, La réforme du Conseil de l'Union Européenne à partir de la théorie des jeux, *Revue Française d'Economie* 16, 3-58 (2001)
- D. Felsenthal et M. Machover, *The measurement of voting power : Theory and Practice, Problems and Paradoxes*, Edward Elgar (1998)
- D. Felsenthal et M. Machover, Analysis of QM rules in the draft constitution for Europe proposed by the European convention 2003, *Social Choice and Welfare* 23, 1-20 (2004)
- A. Gelman, J.N. Katz et F. Tuerlinckx, The mathematics and statistics of voting power, *Statistical Science* 17, 420-435 (2002)