

# Le Scrutin Binominal Paritaire : Un Regard d'Ingénierie Electorale

Michel Le Breton<sup>\*</sup>    Dominique Lepelley<sup>†</sup>    Vincent Merlin<sup>‡</sup>    Nicolas Sauger<sup>§</sup>

21 Mars 2015

## Résumé

A partir du cas du changement du mode d'élection des conseillers départementaux français, cet article propose un cadre analytique d'évaluation des réformes de système électoral. Dans une perspective d'ingénierie électorale, quatre indices principaux sont utilisés, notamment les indices de dismajorité et de disproportionnalité. On montre ainsi que l'exigence de parité entre hommes et femmes introduite par le scrutin binominal paritaire a pu être réalisée aux dépens d'autres qualités attendues d'un système électoral. L'analyse systématique de ces arbitrages forme le cœur de cet article, avec une première application à notre cas d'étude.

**Classification JEL :** D71, D72.

**Mots clés :** Elections départementales ; Scrutin plurinominal ; Proportionnelle ; Ingénierie électorale ; Parité ; Simulations.

---

<sup>\*</sup>Institut Universitaire de France et Toulouse School of Economics, France. Email : michel.lebreton@tse.edu

<sup>†</sup>CEMOI, Université de La Réunion, France. Email : dominique.lepelley@univ-reunion.fr

<sup>‡</sup>CREM, CNRS and Normandie University, UCBN, France. Email : vincent.merlin@unicaen.fr

<sup>§</sup>Sciences Po, Paris, CEE et LIEPP. Email : nicolas.sauger@sciencespo.fr

# 1 Introduction

Cet article s'intéresse à une réforme récente du système électoral français : la réforme du mode d'élection des conseillers départementaux (nouvelle appellation des conseillers généraux). La loi 2013-403 du 17 mai 2013 prévoit en effet que le mode de scrutin à deux tours dans le cadre de circonscriptions (cantons) uninominales est remplacé par un scrutin appelé scrutin binominal paritaire. Le principe en est simple. Il consiste en l'élection d'une liste fermée de deux candidats (un *binôme*) par canton, liste devant obligatoirement comprendre un homme et une femme. La formule électorale, à deux tours, reste par ailleurs pour l'essentiel inchangée. La majorité absolue permet de l'emporter au premier tour. Sinon, peuvent concourir au second tour tous les binômes ayant obtenu un nombre de voix au moins égal à 12,5 % des inscrits<sup>1</sup>. Lors de ce second tour, le binôme qui a le plus de voix l'emporte. L'objectif de cet article est de réaliser, *ex ante*, un modèle d'évaluation des effets de cette réforme, dans une perspective d'ingénierie électorale.

La réforme du mode d'élection des conseillers départementaux modifie trois aspects principaux : le nombre des circonscriptions, par fusion et redécoupage des cantons<sup>2</sup>; le nombre d'élus par circonscription (ou *district magnitude*), qui passe de un à deux; l'exigence de parité dans la formation des binômes de candidats dans ces circonscriptions. L'effet attendu de cette réforme est principalement une modification de la composition des assemblées départementales en termes de genre puisque, mécaniquement, les nouveaux conseils départementaux compteront autant d'hommes que de femmes. Les débats sur cette réforme ont d'ailleurs porté principalement sur l'exigence de parité. Il est clair que sur ce critère, les conseils généraux étaient les moins bien lotis<sup>3</sup>.

Si, mécaniquement, le mode de scrutin binominal répond pleinement à l'exigence de parité, il bouscule pour ce faire le processus électoral. En agrandissant les territoires de la représentation, l'ancrage territorial est transformé. Cet ancrage, conçu comme capacité des citoyens à voir leurs préférences internalisées par leurs représentants ne peut toutefois pas être immédiatement mesuré, même s'il a été présenté également comme une préoccupation majeure de la réforme. Plus généralement, l'impact d'une réforme même en apparence limitée comme celle étudiée ici va au-delà du changement de la composition sociologique de la chambre. Connaître l'impact de cette réforme sur l'ensemble des dimensions de la représentation politique est ainsi crucial pour une évaluation plus complète et objective du changement introduit. L'enjeu est de savoir si ce qui est gagné d'un côté ne risque pas d'être perdu de l'autre.

L'ingénierie électorale dont il est question ici va s'appuyer sur quatre indices à la lumière desquels on obtient une image précise de ce que l'on pourrait appeler le code génétique du mode de scrutin. Chaque indice dans cette liste a pour objet de mesurer une qualité spécifique du système électoral considéré. Le premier indice (indice de dismajorité) mesure la probabilité que le mode de scrutin débouche sur une assemblée dont la couleur dominante

---

1. Si moins de deux binômes franchissent ce seuil, alors les deux binômes ayant obtenus le plus de voix sont qualifiés.

2. Le nombre total de conseillers demeure presque inchangé. La loi du 17 mai 2013 et ses décrets d'application, qui ont défini le processus de redécoupage, prévoit que le nombre de nouveaux cantons par département est égal à la moitié du nombre de canton existant avant le redécoupage, moitié cependant arrondie à l'entier impair supérieur. Par ailleurs, un minimum de 13 cantons pour les départements d'au moins 150.000 habitants est prévu, 17 pour ceux avec plus de 500.000 habitants. Le nombre d'élus au niveau national a ainsi augmenté d'un peu plus d'une centaine, de 3863 à 3990 sur le territoire métropolitain.

3. L'appendice 5 et le rapport N° 250 du Sénat contiennent des informations sur le profil des assemblées locales. Qu'il s'agisse du genre, mais aussi de l'âge ou de la profession, on constate que l'on s'écarte significativement d'une représentation fidèle de la société française.

diffère de l'opinion publique majoritaire. Le second indice (indice de disproportionnalité) mesure l'écart entre la représentation des opinions politiques dans la chambre (mesurée par les sièges) et la représentation politique dans l'opinion (mesurée par les voix). Le troisième indice (indice de disparité) mesure l'écart entre la fraction des femmes dans la chambre et la fraction des femmes dans la population. Enfin, le quatrième indice (indice de disproximité/disresponsabilité) mesure la distance réelle ou potentielle entre les décisions/préférences politiques du (des) représentant(s) et celles de sa base électorale. Dans cet article, nous nous concentrerons principalement sur les deux premiers car une analyse fine de l'impact du système électoral sur les deux derniers indices réclame un cadre analytique autrement plus compliqué que celui que nous considérons ici.

Naturellement, un architecte impartial du système électoral souhaiterait que ces quatre indices aient les plus petites valeurs possibles en espérance<sup>4</sup>. Hélas, en voulant diminuer un indice, le législateur prend le risque d'en augmenter d'autres. Par exemple, en changeant le système pour améliorer la représentation des femmes, il peut introduire plus de disproportionnalité dans le système. L'objet de notre article est d'analyser ces arbitrages dans le contexte du nouveau mode d'élection des conseillers départementaux. D'une part, nous voulons évaluer les changements de valeur des quatre indices dans le passage de l'ancien au nouveau système. D'autre part, nous souhaitons aussi calculer les valeurs prises par les indices pour deux réformes alternatives qui auraient pu être envisagées, à savoir l'attribution des deux sièges du binôme à la proportionnelle au plus fort reste ou à la proportionnelle à la plus forte moyenne.

Le reste du papier est organisé comme suit. La seconde section introduit plus précisément le cas d'étude, en revenant sur le scrutin binominal et le cadre départemental. La troisième section présente notre approche de l'ingénierie électorale, le modèle retenu et la construction des quatre indices. Les quatrième et cinquième sections présentent le traitement analytique du calcul des indices. Dans cette version préliminaire de notre travail, nous ne procédons pas à une estimation des paramètres du modèle statistique choisi mais nous décrivons la méthode suivie et les possibilités offertes par un simulateur gaussien s'agissant du calcul des indices. L'application de notre méthode pose en effet deux types de problèmes qu'il convient de séparer. D'une part, un problème d'économétrie : comment estimer au mieux à l'aide des données électorales disponibles les paramètres de la loi de probabilité multidimensionnelle qui décrit les tirages des préférences droite/gauche à l'échelle de chaque département ? D'autre part, un problème de mathématique/informatique : étant donnée cette loi de probabilité, comment calculer les valeurs espérées de ces quatre indices ? La combinatoire du problème est loin d'être simple et la dérivation de formules analytiques exactes concernant la relation voix/sièges est pour tout dire hors de portée dès que le nombre de districts devient élevé. Nous présentons un outil qui nous permet de simuler la loi jointe voix/sièges et donc de calculer les valeurs des deux premiers indices.

---

4. En espérance, car *ex ante*, on ne sait pas avec certitude ce que sera l'état de l'opinion lors d'une élection donnée.

## 2 La réforme des élections départementales

Nous proposons d'abord de situer plus précisément le cadre de la réforme étudiée, par rapport au cadre départemental et dans la littérature sur les systèmes électoraux.

### 2.1 Des conseillers généraux aux conseillers départementaux

Le département est, avec la commune, l'un des découpages territoriaux les plus stables en France. Les départements datent d'un décret du 26 février 1790, qui créait 83 d'entre eux. Le découpage des départements en cantons date lui de 1800 (loi du 28 Pluviose an VIII), le nombre de cantons variant selon les départements. Le découpage a été effectué, à l'époque, sur la base d'une aire géographique et non sur des bases démographiques. Depuis, le découpage n'a jamais fait l'objet d'une refonte générale, si bien qu'environ 60 % des cantons existants avant la réforme de 2013 n'ont jamais été modifiés. En revanche, de nombreux ont été créés dans les zones en forte croissance démographique, principalement urbaines. Au total, le nombre s'est accru d'un tiers, jusqu'à 4 055 cantons en 2010, dont 172 dans les cinq départements d'outre-mer. Le nombre moyen de cantons par département était de 40 et leur population moyenne s'élevait à 15 986 habitants toujours en 2010.

Ces cantons ont servi de base à l'élection d'assemblées départementales dès 1833, même si les départements ne deviennent reconnus comme collectivités territoriales qu'en 1871. Le rôle de ces élections se trouve renforcé par la décentralisation initiée en 1982. Les années 2010 voient cependant émerger plusieurs projets de réformes d'ampleur de ce cadre.

La réforme des collectivités territoriales, initiée par le comité Balladur<sup>5</sup> appelait donc pour la première fois à un remodelage général du découpage cantonal sur base démographique. Il proposait que les cantons fussent remplacés par des circonscriptions plus étendus à l'intérieur des frontières départementales. Les conseillers généraux et régionaux auraient été remplacés par un nouveau type d'élus, les conseillers territoriaux, qui auraient été désignés lors d'un scrutin de liste proportionnel à deux tours, avec une prime majoritaire. Cette élection, qui ne pouvait pas intervenir avant 2014, aurait dû avoir lieu le même jour pour les deux collectivités (département et région). Les premiers de liste auraient siégés au département ainsi qu'à la région ; les suivants dans la seule assemblée départementale.

Toutefois l'option retenue par le gouvernement alors en place, par le Projet de loi de réforme des collectivités territoriales, discuté au Parlement à partir d'octobre 2009, était un peu différente. Les nouveaux cantons devaient alors être en moyenne de 20 000 habitants et devaient servir de circonscription pour l'élection des conseillers territoriaux au scrutin à un tour. En parallèle, 20 % des conseillers territoriaux devaient être élus au niveau départemental à la proportionnelle.

Le texte finalement adopté en novembre 2010 ne prévoyait plus toutefois cette dose de proportionnelle, et établissait un nombre de conseillers, et donc de cantons par département, différent. Cette répartition était annexée sous forme de tableau à la loi, jusqu'à sa censure par le Conseil constitutionnel en décembre, en raison du déséquilibre

---

5. Comité pour la réforme des collectivités locales, créé par décret du président de la République le 22 octobre 2007

de certaines répartitions. Un nouveau tableau de répartition fût finalement adopté en juillet 2011.

Suite aux élections présidentielle et législatives de 2012, la nouvelle majorité décide de revenir sur la loi de 2010. L'engagement de François Hollande était alors de créer des élections départementales, avec « un nouveau mode de scrutin qui devra assurer une proximité mais aussi une meilleure représentation de toutes les sensibilités, et respecter le principe de parité posé dans la Constitution. » La réforme annoncée avait donc pour objectif de remédier aux inconvénients de l'élection au scrutin majoritaire appliqué jusqu'alors, qui avait eu pour effet une forte bipolarisation de la vie politique locale autour du PS et de l'UMP et un faible accès des femmes, qui ne représentaient que 13,5 % des conseillers généraux.

Le projet de loi est adopté en Conseil des ministres le 28 novembre 2012. Il prévoit le retour des cantons comme circonscription pour élire les seules assemblées départementales, rebaptisées conseils départementaux. Cependant, un redécoupage est prévu, ainsi que l'application d'un nouveau mode de scrutin, le scrutin binominal paritaire. Le 16 mai 2013, ces dispositions, adoptées par le parlement, sont validées par le Conseil constitutionnel, le redécoupage des cantons devant être ensuite engagé par le Ministère de l'intérieur, et validé par un décret, après avis de chacun des conseils généraux concernés. Ce redécoupage ne se résume pas à la simple fusion de deux anciens cantons en un seul représenté par deux conseillers départementaux : la loi prévoit des modalités complexes destinées à assurer la réduction des disparités démographiques majeures qui existaient entre les cantons au sein d'un même département<sup>6</sup>. Le redécoupage induit par la réforme de 2013 applique les règles suivantes, répliquations des principes retenus pour le découpage des circonscriptions législatives :

« La modification des limites territoriales des cantons effectuée est conforme aux règles suivantes :

- a - Le territoire de chaque canton est défini sur des bases essentiellement démographiques ;
- b - Le territoire de chaque canton est continu ;
- c - Est entièrement comprise dans le même canton toute commune de moins de 3 500 habitants.»

## 2.2 Le scrutin binominal

Le scrutin binominal, nouvellement utilisé pour les élections départementales, n'est pas une invention complète. La version française innove cependant dans le sens où le ticket doit comprendre un homme et une femme.

Cox (1984) rappelle que la valeur 2 pour la *district magnitude* était la norme (les deux autres magnitudes les plus fréquentes étant 1 et 3) dans les élections anglaises du XIIIe siècle jusqu'au milieu du XIXe siècle. Le système politique américain hérita des lois anglaises et la prédominance de circonscriptions avec une *district magnitude* égale ou supérieure à 2 perdura dans la période post-coloniale. Depuis la seconde guerre mondiale, la *district magnitude* de 1 s'est cependant imposée comme la norme au niveau fédéral. Aujourd'hui, des circonscriptions de *district magnitude* égale à 2 existent toujours dans 9 États pour l'élection des membres de leur chambre basse.

Le choix d'une *district magnitude* égale à 2 était vu comme un remède potentiel à la disproportionnalité résultant d'une *district magnitude* égale à 1. Pour en juger, il faut bien sûr spécifier la formule électorale utilisée dans le cas où la *district magnitude* est égale à 2. Dans le cas anglo-saxon que nous venons d'évoquer, il s'agit du mécanisme

---

6. Qui allaient de 1 à 50, violant manifestement le principe constitutionnel d'égalité des citoyens devant le suffrage universel.

majoritaire binominal avec listes complètement ouvertes. On pourrait aussi envisager un mécanisme majoritaire plurinominal avec listes fermées. On peut enfin penser à des formules proportionnelles avec listes semi-ouvertes ou fermées. Il est intéressant d’observer que dans l’argumentaire en faveur de l’adoption du scrutin binominal paritaire tel qu’il apparaît dans le Rapport N°250 du Sénat figure un encadré sur le système d’élection des parlementaires chiliens. Dans ce système binominal, les listes sont ouvertes (les candidats figurant sur les listes peuvent être ou non du même parti), la liste qui obtient le meilleur score emporte le premier siège (qui va à celui qui a reçu le plus de voix). Le second siège échoit aussi à cette liste si son score dépasse le double du score de la liste suivante. Sinon, il échoit à la liste en seconde position. Dans le cas de deux partis, ce système correspond à la méthode de Jefferson (plus forte moyenne) étudiée dans notre article. Si on avait remplacé double du score par triple du score, on aurait obtenu le système d’Hamilton (plus fort reste) aussi étudié dans notre article. Il convient donc de préciser avec quelle formule électorale est couplée une *district magnitude* de valeur 2.

Dans le cas anglo-saxon, le système majoritaire plurinominal ne produit pas beaucoup de proportionnalité entre les deux forces politiques : comme le note Gregor (2013), la part des résultats mixtes dans les districts américains utilisant ce système n’est que de 21%. En revanche, le système chilien conduit à un indice de disproportionnalité plus bas comme en atteste l’historique des élections parlementaires dans ce pays. Mais aucun de ces systèmes ne prévoit de clause paritaire : seuls 14% des députés chiliens sont des femmes.

S’agissant d’ingénierie électorale, on peut se livrer à de nombreuses analyses dans la veine de celle conduite dans cet article. Deux articles (Gregor (2013), Eggers et Fourinaies (2013)) sont particulièrement proches de notre problématique car consacrés à l’analyse de l’impact de la *district magnitude* et de la formule électorale sur les performances du système électoral.

Gregor (2013) se livre à un exercice d’ingénierie électorale sophistiqué où il compare, dans le cas d’une *district magnitude* égale à 2 et d’un ensemble de 4 types de candidats, les systèmes électoraux où chaque électeur dispose d’un certain nombre (maximal) de votes positifs ( $V+$ ) et d’un certain nombre (maximal) de votes négatifs ( $V-$ ). Les deux vainqueurs sont les candidats avec les scores nets les plus élevés. Le système majoritaire plurinominal correspond au cas où  $V+ = 2$  et  $V- = 0$ . Le système par approbation correspond au cas où  $V+ = 3$  et  $V- = 0$ . Le système par approbation/désapprobation correspond au cas où  $V+ = 3$  et  $V- = 3$ . Gregor démontre l’optimalité du système  $V+ = 2$  et  $V- = 1$ <sup>7</sup> lorsque l’évaluation est basée sur l’espérance du critère utilitariste (qui est le critère le plus utilisé dans l’ingénierie électorale unicritère).

Eggers et Fourinaies (2013) est l’article le plus proche du nôtre. Ces auteurs revisitent deux énoncés traditionnels de la science électorale :

- Énoncé (1) : dans le cas où la formule électorale est une formule proportionnelle, l’accroissement de la *district magnitude* **décroit** la disproportionnalité ;
- Énoncé (2) : dans le cas où la formule électorale est le scrutin majoritaire plurinominal avec listes ouvertes, l’accroissement de la *district magnitude* **accroît** la disproportionnalité.

---

7. D’après lui, ce mécanisme électoral aurait été proposé en 2012 par Karel Janecek, un financier, mathématicien et philanthrope tchèque. On remarquera que ce système n’est pas sans évoquer les scores de Borda, dont Laplace avait déjà remarqué les liens qu’ils entretiennent avec le principe utilitariste.

Ils font remarquer que l'énoncé (2) fait l'objet de conclusions contradictoires sur le plan empirique et pointent du doigt (à juste titre) le fait que la contrefactuelle n'est pas clairement définie : travaille-t-on à l'échelle d'un district dont la population est fixe ou à l'échelle de l'ensemble des districts ce qui suppose une réduction par deux du nombre de districts? Ils montrent que l'énoncé (1) est valide quelle que soit la contrefactuelle alors que l'énoncé (2) l'est aussi sans ambiguïté dans le cas de la première contrefactuelle ("district level"), mais ne l'est pas en toute généralité dans le cas de la seconde ("system level"). Ils écrivent cependant "At the system level, increasing district magnitude (and thus reducing the number of districts) *is likely to increase disproportionality...*". L'analyse de ce dernier point est menée sur le plan empirique et l'analyse causale de (1) et de l'énoncé (2) au "district level" est menée sur le plan local.

Le fait que le passage d'une magnitude de 1 à 2 concomitante avec une réduction par deux du nombre de districts puisse augmenter la disproportionnalité a été illustré dans un article de Bekmezian (2015) paru dans *Le Monde* daté du 1<sup>er</sup> Mars 2015 et consacré au cas du département de la Meuse. Avant le redécoupage, la gauche disposait de 13 cantons sur 31, soit 42% des sièges. En s'appuyant sur les arguments du cabinet Liegey Muller Pons, l'article montre qu'en reportant à l'identique les scores obtenus par ses candidats aux élections cantonales précédentes dans les frontières des nouveaux cantons, la gauche n'obtiendrait plus que 5 victoires sur 17, soit seulement 29% des sièges. Ainsi, le scénario retenu par le législateur, en divisant le nombre de cantons par deux, devrait renforcer le parti dominant dans un département donné, comme le suggère l'énoncé 2 d'Eggers et Fourinaies formulé précédemment.

### 3 L'ingénierie électorale et ses tradeoffs

#### 3.1 L'ingénierie électorale

Cet article s'inscrit ainsi dans une tradition d'ingénierie électorale (voir par exemple Grilli di Cortona, Manzi, Pennisi, Ricca et Simeone (1999) et Norris (2004)<sup>8</sup>). L'ingénierie électorale est une science appliquée relativement jeune mais qui plonge ses racines dans une tradition intellectuelle ancienne, au croisement entre théorie du choix social et science électorale, qui consigne et répertorie les différentes formules d'élection<sup>9</sup>. D'une certaine manière, la théorie du choix social et la science électorale ont en commun de mettre l'accent sur les propriétés attendues d'un mécanisme électoral (en théorie du choix social, on parlera d'axiomes) et les difficultés que l'on rencontre à exiger d'un mécanisme qu'il satisfasse une liste trop longue de propriétés. La théorie met alors en évidence les arbitrages (tradeoffs), voire impossibilités (comme celle décrite par Arrow (1952)), auquel l'architecte du mécanisme est inévitablement exposé en accomplissant sa tâche de sélection. A des fins de transparence et d'éclairage, l'analyse comparative des avantages et défauts de chaque mécanisme devient alors essentielle<sup>10</sup>.

Dans cet article, nous employons le vocable "ingénierie électorale" pour désigner l'analyse d'un mécanisme électoral à l'aide d'une batterie de critères/indices mesurant chacun une dimension importante du mécanisme. Le

---

8. D'une certaine façon, l'ingénierie s'apparente au "mechanism design" à ceci près que le problème d'optimisation complet (objectifs et contraintes) est rarement écrit. A cet argument à charge on peut opposer un argument à décharge, à savoir que l'output du mechanism design peut être trop sensible à certains détails de l'optimisation et manquer de ce fait de robustesse.

9. Voir Blais (1988), pour un essai de classification.

10. La diversité des modes de scrutin à travers le temps et l'espace est immense. On en trouvera une description très détaillée dans Diamantopoulos (2004) et Martin (1997).

mot peut cependant recouvrir des approches différentes qu’il convient de distinguer. De ce point de vue, trois aspects méritent d’être discutés. Tout d’abord, on doit se demander si l’analyse est théorique (y a-t-il un modèle causal qui explique analytiquement comment on passe des préférences aux sièges via les bulletins de vote?) ou empirique (la dépendance entre les performances d’un mécanisme et les paramètres du mécanisme sont-elles uniquement le reflet de régularités empiriques?). Ensuite, dans l’éventualité où l’analyse est théorique, on doit examiner comment l’analyse causale prend en compte ou non les comportements des acteurs. Enfin, s’agissant de l’évaluation normative, on doit expliciter le ou les critères utilisés pour évaluer et mesurer les qualités des mécanismes et l’opportunité d’une réforme. Faut-il se limiter à un critère unique welfariste, cherchant à maximiser le bonheur ou l’utilité du plus grand nombre, ou envisager aussi des critères non welfaristes?

Le travail mené dans cet article est principalement théorique dans le sens précis où il repose sur une chaîne causale. Au départ, un mécanisme est une forme de jeu (“game form”)  $M$  qui transforme un vecteur de votes  $V$  en un vecteur de sièges  $S$ . La combinaison du mécanisme  $M$  et d’un profil de préférences/utilités individuelles  $P$  définit un jeu non-coopératif sous forme normale dont il faut analyser les équilibres  $V = E(M, P)$ . Autrement dit, l’analyse d’un mécanisme passe par une étude des effets mécaniques mais aussi des effets psychologiques (pour reprendre la terminologie de Duverger). Pour analyser les effets d’une réforme électorale, le changement d’équilibre de  $V = E(M, P)$  à  $V' = E(M', P)$  peut aussi bien provenir des effets mécaniques du passage de  $M$  à  $M'$ , que de la modification du comportement des électeurs à l’équilibre. Dans notre article nous supposons qu’il n’y a que deux types de candidats (gauche/droite; démocrate/conservateur). Dans ce cas, l’effet psychologique disparaît car vote sincère et vote stratégique coïncident. En revanche dans le cas général, on ne peut faire l’impasse sur les complexités additionnelles résultant des réactions comportementales aux changements de règles du jeu. Il n’est pas évident de séparer les deux.

S’agissant de la dimension normative, notre approche, suivant en cela la science électorale, est multicritère. L’évaluation d’un mécanisme se fait à l’aune de plusieurs critères qui ne sont nullement agrégés. Cette approche doit être contrastée avec celle héritée du “mechanism design” et utilisée en théorie du vote (Weber (1977), Barberà et Jackson (2006), Bordley (1983), Chamberlin et Cohen (1978), Merrill (1984,1985), Beisbart et al. (2005), Beisbart, Bovens (2013)) qui utilise un critère welfariste unique comme par exemple la valeur espérée des utilités individuelles. Le point commun entre l’approche de type “science électorale” utilisée dans ce papier et l’approche “mechanism design” est le point de vue *ex ante*. L’évaluation du mécanisme se fait en effet avant de connaître le profil de préférences des électeurs. Il faut donc se doter d’un modèle décrivant la fréquence des différents profils sous la forme d’une loi de probabilité sur l’ensemble des profils de préférences. Le choix de cette loi de probabilité n’est pas sans incidence sur la comparaison des mécanismes.

L’approche empirique en ingénierie électorale procède de manière différente. En lieu et place de causalités théoriques, elle identifie des régularités empiriques fortes entre les paramètres du système électoral et certains indices décrivant les conséquences du système : nombre de partis dans le paysage politique, taux de participation des femmes à la vie politique, représentation des différentes forces politiques au parlement, corruption et responsabilité des hommes politiques... Un classique de cette approche est le livre de Shugart et Taagepera (1989). On trouve



dans la littérature récente de nombreuses publications d'ingénierie électorale portant sur des points plus particuliers. Citons en particulier le travail de Carey et Hix (2011) portant sur l'impact de la *district magnitude* sur la disproportionnalité, le nombre de partis dans les coalitions gouvernementales ou au parlement et la distance entre citoyen et gouvernement. Ils examinent<sup>11</sup> comment ces quatre critères (les trois derniers sont des mesures différentes d'*accountability*) varient en fonction de la *district magnitude* et démontrent que le gain marginal en matière de représentativité, élevé pour les petites valeurs de *district magnitude*, devient nul au-delà d'un certain seuil et qu'à l'inverse, le coût marginal en matière d'*accountability* élevé pour de petites valeurs devient lui aussi quasi nul ensuite. La probabilité d'avoir de bonnes performances (signifiant ici obtenir simultanément des valeurs d'indices inférieures à leur valeurs médianes) pour les quatre critères est, sans surprise, petite : en dessous de 10%. Carey et Hix observent que cette probabilité combinée atteint sa valeur maximale pour une *district magnitude* voisine de 10.

### 3.2 Le modèle : hypothèses et notations

Comme les auteurs précédents, nous allons nous focaliser sur un petit nombre d'indices et mesures pour évaluer de manière pertinente les effets de la réforme de l'élection des conseillers départementaux. En préliminaire, il nous faut présenter notre modèle et nos hypothèses, qui précisent ainsi les conditions dans lesquelles nos conclusions resteront valides.

On modélise l'élection du parlement (unicaméral) de taille  $R$  (ici, fixé) d'un pays (ou territoire)  $N$  comprenant  $n$  électeurs. La chambre est composée de deux types possibles de représentants  $G$  ou  $D$  et chaque électeur  $i$  de  $N$  est décrit par sa préférence  $P_i$ . Il y a deux préférences possibles :  $G$  ou  $D$ . Un électorat est donc décrit ici par un profil de préférences :  $P = (P_1, \dots, P_n) \in \{G, D\}^n$ . Un mécanisme électoral (*scrutin plurinominal*) est une application  $M$  définie sur  $\{G, D\}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  : à tout profil  $P = (P_1, \dots, P_n) \in \{G, D\}^n$ , il attache une décision  $M(P) = (m^G(P), m^D(P)) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $m^G(P) + m^D(P) = R$  où  $m^G(P)$  et  $m^D(P)$  désignent respectivement le nombre d'élus de gauche et le nombre d'élus de droite dans l'assemblée. Il est naturel de transposer dans ce contexte d'élection d'un parlement les conditions préconisées par May (1952) pour juger du choix d'un vainqueur parmi deux candidats.

- Un mécanisme  $M$  est *monotone* si pour tout  $P, P' \in \{G, D\}^n$  tels que  $P_i = G \Rightarrow P'_i = G$  (respectivement  $P_i = D \Rightarrow P'_i = D$ ) on a  $m^G(P') \geq m^G(P)$  (respectivement  $m^G(P') \leq m^G(P)$ ).
- Un mécanisme est dit *anonyme* si pour tout  $P \in \{G, D\}^n$  et toute permutation  $\sigma$  sur  $N$ ,  $M(P) = M(P^\sigma)$  où  $P_i^\sigma = P_{\sigma(i)}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
- $M$  est dit *neutre* si pour tout  $P \in \{G, D\}^n$ ,  $m^G(P') = m^D(P)$  et  $m^D(P') = m^G(P)$  où pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $P'_i = G$  si  $P_i = D$  et  $P'_i = D$  si  $P_i = G$ .

En mots, un mécanisme  $M$  est neutre s'il traite sur un pied d'égalité les candidats des deux bords.  $M$  est anonyme

---

11. Dans cet article ambitieux, ils démontrent empiriquement que ces trade-offs ne sont pas linéaires et que l'on peut gagner beaucoup des avantages attachés aux règles proportionnelles (PR) sans sacrifier ceux que l'on attribue aux systèmes majoritaires en considérant des *district magnitudes* petites à modérées. Ils testent cette affirmation sur 610 résultats électoraux dans 81 pays entre 1945 et 2006. Les systèmes électoraux qui utilisent des *district magnitudes* supérieures à 1 mais modérées produisent des indices de disproportionnalité comparables aux systèmes PR purs tout en limitant la fragmentation partisane, produisent des gouvernements de coalition plus simples, et surpassent les deux systèmes purs du point de vue des performances économiques.

s'il traite sur un pied d'égalité les électeurs. On notera respectivement  $n^G(P)$  et  $n^D(P)$  le nombre d'électeurs de gauche et d'électeurs de droite dans le profil  $P$ . On vérifiera facilement qu'un mécanisme est anonyme si la composition de l'assemblée ne dépend que des nombres  $n^G(P)$  et  $n^D(P)$ .

De fait, le seul mécanisme monotone, neutre et anonyme est le mécanisme majoritaire si l'on veut n'élire qu'un vainqueur (May 1952). Mais comme l'ont montré Nermut (1994), Chambers (2008), Bervoets et Merlin (2007, 2012) et Puppe et Tasnadi (2015), il n'est plus possible de combiner anonymat et neutralité sans violer d'autres propriétés essentielles, même avec deux candidats, si l'élection est indirecte et repose sur la sélection de représentants dans différentes circonscriptions. Dans cet article portant sur l'élection d'un parlement, nous allons considérer exclusivement des mécanismes neutres, monotones et anonymes dans un sens plus faible que celui défini ci-dessus mais capturant cependant l'idée, qu'*ex ante*, tous les électeurs sont sur un pied d'égalité. L'anonymat ne sera ici requis qu'au niveau de chaque district. Il est clair qu'en ingénierie électorale, les mécanismes neutres et faiblement anonymes seront privilégiés pour leurs propriétés d'équité électorale.

La classe des mécanismes électoraux concevables est immense. On va ici s'intéresser à une classe de mécanismes électoraux d'un usage très répandu qui organise l'élection après avoir au préalable divisé le territoire en districts. Précisément, le mécanisme  $M$  sera décrit par deux paramètres : le découpage électoral d'une part et la formule de conversion Voix/Sièges utilisée dans chacun des districts. S'agissant de la première dimension, nous supposerons que la population  $N$  est partitionnée (on notera  $\Pi$  la partition) en  $K$  districts électoraux (circonscriptions,...) :  $N = \cup_{1 \leq k \leq K} N_k$  avec  $N_k \cap N_l = \emptyset$  pour tout  $k, l = 1, \dots, K, k \neq l$ . Ici  $N_k$  désigne la population d'électeurs du district  $k$  et on notera  $n_k$  la taille du district. Ces districts peuvent correspondre à des districts naturels (limites provinciales/administratives) ou des districts "artificiels" conçus à des fins purement électorales. Nous allons nous concentrer sur les mécanismes d'élection où chaque district  $k$  élit une partie de la chambre. Précisément, nous supposerons que le district  $k$  élit  $r_k \in \mathbb{N}$  représentants et que seuls participent à cette élection les électeurs de  $N_k$ . L'élection est donc de ce point de vue la juxtaposition de  $K$  élections locales. Les résultats des  $K$  élections locales définissent une chambre composée de  $R = \sum_{1 \leq k \leq K} r_k$  membres. Etant donné un profil  $P$ , on notera  $n_k^G$  et  $n_k^D$  le nombre d'électeurs de gauche et de droite dans le district  $k$ .

S'agissant de la seconde dimension, à savoir la conversion des voix en sièges dans chacun des districts, nous allons supposer que chaque camp (G et D) présente dans chaque district  $k$  une liste ordonnée de  $r_k$  noms. La formule convertissant dans le district  $k$  le vecteur  $(n_k^G, n_k^D)$  en un vecteur  $(m_k^G, m_k^D)$ <sup>12</sup> tel que  $m_k^G + m_k^D = r_k$  sera noté  $\underline{M}_k$ <sup>13</sup>. En résumé la description complète du mécanisme  $M$  comprend trois termes : l'entier  $K$ , le vecteur d'entiers  $r = (r_1, \dots, r_K)$  et le vecteur  $\underline{M} = (\underline{M}_1, \dots, \underline{M}_K)$ .

Dans cet article, nous allons nous concentrer sur les quatre formules électorales suivantes :

- Système 0<sup>14</sup>. Chaque électeur choisit (le panachage aussi est permis)  $r_k$  noms. Les sièges sont attribués (le

12. Pour alléger les notations, la référence au profil  $P$  est omise.

13. A proprement parler, si les listes ne sont pas bloquées, c'est-à-dire s'il y a place pour un vote préférentiel, on a besoin d'un concept plus général convertissant les bulletins de vote possibles en listes de candidats élus. Une telle extension est nécessaire si de tels bulletins de vote sont permis par la formule et si le comportement des électeurs n'est pas exclusivement dirigé par la préférence partisane. Cette extension n'est pas étudiée dans cet article.

14. Ce système est souvent appelé scrutin majoritaire plurinominal. Dans ce cas, les listes sont ouvertes. Il est utilisé pour les élections sénatoriales en France dans les départements pour lesquels au plus deux sénateurs sont à désigner par les grands électeurs.

- cas échéant, après un tour de majorité absolue) aux candidats réalisant les meilleurs scores
- Système 1<sup>15</sup>. La liste recevant le plus de suffrages emporte la totalité des  $r_k$  sièges.
  - Système 2. Les sièges sont répartis à la proportionnelle au plus fort reste entre les deux partis et pour chaque parti les sièges alloués sont attribués en fonction de l'ordre de la liste. Pratiquement, on définit le quotient (de Hare) comme le nombre  $Q_k = \frac{n_k}{r_k}$ . Chaque camp  $c \in \{G, D\}$  reçoit autant de représentants que la partie entière de  $\frac{n_k^c}{Q_k}$ . Les résidus sont attribués au plus fort reste. Dans le cas où les restes sont égaux, comme par exemple dans le cas où  $(n_k^G, n_k^D) = (75, 25)$  et  $r_k = 2$  (la gauche emporte un représentant puisque le quorum est de 50 et son reste devient égal à celui de la droite), on pourrait songer à “tirer au sort” le parti gagnant le second siège. On reviendra sur ces détails techniques le moment venu.
  - Système 3. Les sièges sont répartis à la proportionnelle à la plus forte moyenne entre les deux partis et pour chaque parti les sièges alloués sont attribués en fonction de l'ordre de la liste. Comme précédemment, chaque camp  $c \in \{G, D\}$  reçoit autant de représentants que la partie entière de  $\frac{n_k^c}{Q_k}$ . Le dernier siège est attribué en divisant  $n_k^G$  et  $n_k^D$  par le nombre de sièges déjà obtenus plus un. Le parti pour lequel ce ratio est le plus élevé emporte le dernier siège. Il est facile de remarquer qu'avec une magnitude 2, le seuil pour emporter le second siège est fixé à  $2/3$  des voix.

Pour évaluer *ex ante* un système électoral, il convient de savoir comment il va fonctionner pour chaque situation, c'est-à-dire ici pour chaque profil qui peut se présenter. Dans certaines élections, les votants seront très divisés/polarisés et dans d'autres élections, on aura plus d'homogénéité. Cette information probabiliste est décrite par un modèle de tirage aléatoire  $\pi$  du profil  $P$ . Deux modèles dominent la littérature<sup>16</sup>. Le premier est connu dans la littérature anglo-saxonne sous le vocable de *Impartial Culture* (IC). Il correspond à la situation où les  $P_i$  résultent de tirages indépendants et équiprobables. Notons  $T \subset N$  l'ensemble des votants choisissant  $G$  pour un tirage particulier de  $P$ . Dans ce cas,  $\pi(T) = \frac{1}{2^n}$  pour tout  $T \subseteq N$ . Le second est connu sous le vocable de *Impartial Anonymous Culture* (IAC). Il suppose que, conditionnellement au tirage uniforme du paramètre  $p$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , les tirages des préférences individuelles sont indépendants et identiquement distribués comme des Bernoulli de paramètre  $p$ . On obtient dans ce cas :  $\pi(T) = \int_0^1 p^t (1-p)^{n-1-t} dp$  où  $t \equiv \#T$ . Comme souligné par Straffin (1977), ce processus est équivalent au tirage de la valeur de  $n^G(P)$  de manière uniforme entre 0 et  $n$ . Le modèle IAC a été originellement introduit de cette façon. Dans cet article, on considèrera des versions mixtes entre IC et IAC comme celles étudiées dans Le Breton, Lepelley et Smaoui (2013).

15. Ce mode de scrutin communément appelé scrutin de liste majoritaire ou scrutin majoritaire plurinominal de liste est utilisé, pour l'élection d'un certain nombre de leurs députés (tous ou partie) à Djibouti, au Liban, à Singapour, en Tunisie, en Équateur, en Suisse et au Sénégal et souvent en complément d'un vote par circonscription quand une circonscription doit pourvoir plusieurs sièges.

Il est également utilisé pour l'élection des grands électeurs dans le cadre de l'élection présidentielle américaine.

On peut avoir un scrutin majoritaire simple où la liste est élue à la majorité relative au premier tour, ou bien un scrutin majoritaire à deux tours où la liste doit être élue à la majorité absolue au premier tour ou relative au second tour.

Ce système amplifie l'influence des grands partis et diminue celle des partis moyens ; il ne respecte pas la représentation proportionnelle. Il est utile pour dégager une majorité forte. Lorsque les règles de constitution de liste obligent à une représentativité des minorités ou des femmes, ce vote permet l'attribution de sièges à ces minorités plus facilement qu'un autre système de vote.

16. Les références sur le sujet sont très nombreuses. Nous renvoyons aux livres de Gerhlein (2006), de Gerhlein et Lepelley (2010) et à l'article de Straffin (1977) pour une introduction.

### 3.3 Des indices au service de l'ingénierie électorale

L'objet principal de cette section est d'identifier à l'aide d'une grille de plusieurs indicateurs quelques-uns des tradeoffs qui apparaissent dans le choix d'un mode de scrutin. Cette grille d'indicateurs constitue du point de vue de l'ingénierie électorale un outil d'évaluation des qualités/défauts inhérents à tout système électoral. Nous introduisons quatre indices mais notre attention va principalement se focaliser sur les deux premiers. Dans chaque cas, plus un indice a une valeur élevée, moins satisfaisant est le mode de scrutin s'agissant de la qualité mesurée par cet indice.

#### 3.3.1 Indice de Dismajorité.

Rien n'interdit à un système électoral d'élire une chambre dominée, disons par une majorité de gauche, alors que l'opinion dans le pays est majoritairement à droite. Ce paradoxe a été abondamment discuté par les théoriciens du vote<sup>17</sup> sous diverse appellations (paradoxe du référendum, élections inversées). D'après Martin (2006), "un mode de scrutin est plus ou moins monotone selon qu'il respecte dans la répartition des sièges la hiérarchie des votes dans la répartition des voix". Sous le vocable "concordance", Pukelsheim (2010) recense cette propriété comme une propriété intrinsèque d'une règle d'allocation des sièges ("apportionment rule"). Balinski et Young (2001) ne l'introduisent pas explicitement comme une propriété de base des méthodes d'allocation des sièges mais examinent les implications de propriétés de monotonie plus exigeantes que celle-là.

L'élection controversée du président républicain G. Bush, qui a recueilli moins de voix que son adversaire démocrate A. Gore lors des élections présidentielles américaines de 2000 est l'exemple le plus célèbre d'occurrence d'une élection inversée. Plus près de nous, Natalie Kosciusko-Morizet militait en 2014 pour l'élection du maire de Paris au suffrage universel direct. Selon elle «Cela permettrait, notamment, d'éviter de se retrouver avec un maire qui peut être désigné par des maires d'arrondissement, sans être majoritaire en voix sur l'ensemble de Paris » allusion à peine masquée à la situation de Bertrand Delanoë en 2001. Si B. Delanoë avait largement remporté les élections en terme d'arrondissements et de sièges, ses listes n'avaient en effet réuni que 48,6% des suffrages en 2001 au second tour sur l'ensemble de la ville. Dans la même veine, l'édition Morbihan de *Ouest-France* datée du 20 Novembre 2013 reprenait les propos du président du conseil général, François Goulard, au sujet du redécoupage des cantons dans son département : «En faisant un certain nombre de simulations, on s'aperçoit que même avec 48% ou 49% des voix, la gauche peut avoir la majorité des sièges. Et cela, uniquement parce que le découpage a été fait de cette manière ».

Cette pathologie est identifiée dans cet article à l'aide d'un premier l'indice,  $I_1$ , que nous allons maintenant décrire.

Considérons un scrutin électoral arbitraire  $M : P = \{G, D\}^n \rightarrow (m^G(P), m^D(P))$  et notons  $Maj(P)$  et  $Min(P)$  les partis respectivement majoritaire et minoritaire pour  $P$  i.e. :

$$Maj(P) = \begin{cases} G & \text{si } n^G(P) > n^D(P) \\ D & \text{si } n^G(P) < n^D(P) \end{cases} \quad \text{et} \quad Min(P) = \begin{cases} D & \text{si } n^G(P) > n^D(P) \\ G & \text{si } n^G(P) < n^D(P) \end{cases}$$

---

17. Sans soucis d'exhaustivité aucun, on pourra renvoyer à Nurmi (1999), Feix et al. (2004), Miller (2015).

La couleur  $C(m^G, m^D)$  d'une chambre composée de  $m^G$  députés de gauche et de  $m^D$  députés de droite est notée :

$$C(m^G, m^D) = \begin{cases} G & \text{si } m^G > m^D \\ D & \text{si } m^G < m^D \end{cases}$$

Nous définirons  $I_1(M, P)$  comme suit :

$$I_1(M, P) = \begin{cases} 0 & \text{si } C(m^G(P), m^D(P)) = \text{Maj}(P) \\ 1 & \text{si } C(m^G(P), m^D(P)) \neq \text{Maj}(P) \end{cases}$$

La moyenne de cette variable aléatoire définit l'*indice de dismajorité* du mécanisme<sup>18</sup>  $M$  :

$$I_1(M) = \int_{\{G, D\}^n} I_1(M, P) \pi(dP)$$

L'indice de dismajorité désigne donc la probabilité que la hiérarchie des sièges inverse la hiérarchie des voix. De notre point de vue, il est préférable d'avoir un mécanisme pour lequel cet indice prend une valeur aussi petite que possible. Plus  $I_1(M)$  est grand et plus le risque que la chambre ne soit pas "conforme" au souhait populaire et donc d'être confronté à un traumatisme de type Bush-Gore est grand. Parmi les mécanismes avec districts, deux ont un indice minimal. C'est tout d'abord le cas du mécanisme associé à  $K = 1$  : une seule (gigantesque) circonscription. Mais c'est aussi (à l'inverse) celui où  $K = n$  (démocratie directe) : cette fois chaque électeur siège dans une assemblée de taille gigantesque. Ce second mécanisme est irréaliste car des assemblées de trop grande taille sont inconcevables. Le premier en revanche ne l'est pas mais il est souvent critiqué pour d'autres raisons comme par exemple le manque de proximité des représentants ainsi élus. Cette exigence du système électoral n'est pas facile à modéliser et nous y reviendrons en présentant l'indice  $I_4$ .

### 3.3.2 Indice de Disproportionnalité

La première demande concernait le respect de l'ordre des résultats en voix. Cette seconde demande va concerner le respect de la proportionnalité. La chambre doit refléter au mieux les poids respectifs des deux opinions/idéologies. Comment mesurer la disproportionnalité d'une chambre? Les politologues ont proposé de nombreux indices différents. Dans le cas général d'un paysage composé de  $J$  partis, l'indice de Gallagher (1991) est défini comme suit :

$$\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (V_j - S_j)^2}$$

où  $V_j$  et  $S_j$  désignent respectivement le pourcentage de voix et le pourcentage de sièges obtenus par le parti  $j$ . Dans le cas où  $J = 2$ , on obtient pour un mécanisme  $M$  et un profil  $P$  l'indice noté  $I_2(M, P)$  :

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(V_{\text{Min}(P)} - S_{\text{Min}(P)})^2 + (V_{\text{Maj}(P)} - S_{\text{Maj}(P)})^2]}$$

18. L'indice de dismajorité  $I_1(M, P)$  ne doit pas être confondu avec le déficit majoritaire (Felsenthal et Machover (1999)) attaché au profil  $P$  qui est défini par :  $I_1(M, P) = \begin{cases} 0 & \text{si } C(m^G(P), m^D(P)) = \text{Maj}(P) \\ n^{\text{Maj}(P)}(P) - n^{\text{Min}(P)}(P) & \text{si } C(m^G(P), m^D(P)) \neq \text{Maj}(P). \end{cases}$

Dans le cas où l'utilité ne prend que deux valeurs, cet indice est identique au critère utilitariste utilisé en ingénierie électorale théorique (Beisbart et Bovens (2013)).

$$= |V_{Min(P)} - S_{Min(P)}| = |V_{Maj(P)} - S_{Maj(P)}|$$

L'indice consiste à considérer la valeur moyenne de cette variable aléatoire ; autrement dit, *l'indice de disproportionnalité* du mécanisme  $M$  est défini par :

$$I_2(M) = \int_{\{G,D\}^n} I_2(M, P) \pi(dP)$$

On veut que cet indicateur soit le plus petit possible. Bien entendu, si  $P$  est tel que le parti minoritaire dans l'opinion est majoritaire dans l'assemblée,  $I_2(M, P)$  est différent de 0. Par exemple, si le pourcentage de sièges obtenus par  $Min(P)$  est 60 alors que le pourcentage des voix obtenues par  $Min(P)$  est 40, alors  $I_2(M, P)$  vaut 20%. On trouve aussi 20% dans le cas où le pourcentage de sièges obtenus par  $Min(P)$  est 45 alors que le pourcentage des voix obtenues par  $Min(P)$  est 25. Les deux 20% ne sont pas tout à fait identiques : le premier est comptabilisé par  $I_1(M, P)$  et  $I_2(M, P)$  alors que le second l'est uniquement par  $I_2(M, P)$ . Notons encore que cette préoccupation est loin de laisser indifférents les responsables politiques. Dans son édition Morbihan datée du 21 février 2014, le quotidien *Ouest France* rapporte les propos de David Lappartient, chef de file de la droite et du centre dans le conseil général de ce département : “Avec 49.5% des voix, la gauche peut obtenir 67% des sièges” estime-il. Notons qu'il met l'accent sur la dismajorité mais aussi sur une très forte disproportionnalité anticipée (ex post, c'est à dire pour cette élection particulière) estimée par lui à 17,5%.

De nombreux autres indices ont été proposés et la littérature abonde de résultats. Le Chapitre 10 de Pukelsheim (2011) contient une remarquable synthèse des principaux d'entre eux<sup>19</sup>. S'agissant de l'indice de Gallagher, le meilleur mécanisme permettant de le minimiser consiste à choisir une *district magnitude* maximale et à utiliser la méthode proportionnelle d'Hamilton.

De fait, en retenant l'indice de Gallagher nous avons fait le choix implicite de mesurer la disproportionnalité par rapport à la méthode de Hamilton/Sainte-Laguë. Ce choix n'est pas à l'abri de la critique. Nous aurions pu choisir de mesurer la disproportionnalité en utilisant un autre indice. Nous commenterons dans la suite de l'article la sensibilité de nos résultats à ce choix méthodologique.

### 3.3.3 Indice de Disparité

Dans cet article, les candidats sont classés en deux groupes en fonction de leur couleur politique/affiliation partisane. En pratique, et selon le type d'élection considéré, les candidats se distinguent les uns des autres en fonction de nombreuses autres caractéristiques comme par exemple le genre, la profession, le niveau d'éducation, la compétence, ou plus généralement toute dimension individuelle touchant à la personnalité du candidat. Les électeurs

19. Le plus célèbre est probablement l'indice de Sainte-Laguë (1910). Il s'écrit, pour  $J$  partis :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(V_j - S_j)^2}{V_j}$$

Dans le cas où  $J = 2$ , le lecteur pourra facilement vérifier qu'il varie toujours de la même manière que l'indice de Gallagher.

et/ou le législateur peuvent (ou non) accorder de l'importance à ceux-ci. En pratique, pour qu'un candidat ayant des caractéristiques données soit élu, il doit passer deux obstacles : être choisi par son parti pour figurer sur la liste, puis être choisi par les électeurs.

On peut légitimement se demander si tous les mécanismes électoraux sont équivalents du point de vue de la représentation des groupes, lorsque par groupe on n'entend plus ensemble de personnes affiliées à un parti ou une idéologie mais ensemble de personnes identifiées par une caractéristique sociologique du type de celles auxquelles nous venons de faire allusion. Pour fixer les idées, nous allons nous limiter ici au genre qui partitionne la société en deux groupes : les femmes et les hommes. On souhaiterait *a priori* (à idéologie, compétence, etc,...données) que les deux groupes soient également représentés dans l'assemblée et que le mécanisme électoral utilisé ne biaise pas la représentation dans un sens ou dans l'autre.

A notre connaissance, ce problème n'a fait l'objet d'aucun examen théorique<sup>20</sup>. Pour ce faire, il faudrait un profil de préférences des électeurs autrement plus riche que celui considéré ici où les préférences sont de deux types seulement. Pour parler de façon approfondie de cette question, il faudrait considérer maintenant des préférences sur des candidats décrits par deux paramètres. Précisément, il y aurait dans notre modèle 4 types de candidats : (G,H), (G,F), (D,H) et (D,F). L'ensemble des préférences individuelles devient aussi beaucoup plus compliqué : on passe de 2 à 24 préférences possibles. Comment se comporte un électeur qui doit choisir entre deux listes ? Lorsque l'idéologie compte plus que tout (on parle d'une dominance lexicographique de l'affiliation partisane) alors la composition des listes H/F n'a aucune espèce d'importance de son point de vue. En revanche, si ce n'est pas le cas, la connaissance détaillée des préférences devient cruciale pour prédire le vote.

Nous n'allons pas entreprendre ici une construction théorique pour expliquer comment se comportent les électeurs. L'ingénierie électorale théorique est d'ailleurs muette sur ces questions. Pour les quatre mécanismes considérés dans ce papier, en supposant que l'affiliation partisane domine lexicographiquement toute autre considération, nous mettons provisoirement de côté cette difficulté.

L'ingénierie électorale empirique en revanche a consacré de nombreuses recherches à cette question. La principale conclusion qui ressort de ces recherches est remarquablement consignée dans le tableau 8.2. de Norris (2004). Sur l'échantillon de 182 nations qui figurent dans sa base de données, il apparaît que la proportion des femmes dans les parlements de pays utilisant une formule électorale majoritaire est en moyenne de 8.5% contre 15.4% (presque le double) dans les parlements des pays utilisant une formule proportionnelle. Naturellement pour confirmer ces comparaisons sur les effets des formules électorales en tant que telles, un certain nombre de contrôles sont nécessaires mais une analyse multivariée du taux de représentation des femmes dans le parlement confirme le rôle de la formule électorale comme prédicteur important.

Puisqu'aucune mesure *ex ante* de la performance d'un système électoral  $M$  quant à la représentation des femmes n'est à ce jour disponible, on se contente d'une mesure *ex post* à l'aide de l'indice suivant de *disparité* :

$$I_3(M) = |\alpha - \beta|$$

---

20. Du point de vue normatif, il s'agit d'un problème de double représentation.

où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent respectivement les proportions des femmes dans la population et dans l'assemblée.

Notons au passage que l'on aurait pu forcer la parité autrement que par un mécanisme binominal. Par exemple, rien n'empêchait de diviser les  $K$  sièges en deux groupes égaux de taille  $\frac{K}{2}$  et d'organiser, à l'échelle des nouveaux supercantons, un double vote consistant en deux votes uninominaux : un premier vote parmi les candidats féminins du canton et un second vote parmi les candidats masculins du canton. Un tel mécanisme  $M'$  offre plus de flexibilité aux électeurs et vérifie aussi  $I_3(M') = 0$ . Par contre, ici, à l'issue du vote, le nombre d'élus féminins de gauche n'est pas nécessairement égal au nombre d'élus masculins de gauche. Si l'affiliation partisane domine toute autre considération, ce nouveau mécanisme produit un profil de votes identique en tout point à celui du mécanisme considéré dans ce papier.

### 3.3.4 Indice de Disproximité/Disresponsabilité

Une crainte non dissipée qui revient souvent dans la bouche des élus mais aussi des électeurs des cantons ruraux est la distance qui sera plus grande désormais entre un élu et les citoyens qu'il est supposé représenter. Les supercantons seront plus grands en termes de population mais aussi (par voie de conséquence) de disparité géographique dans les zones à faible densité de population. On peut penser que le mécanisme choisi par le législateur amoindrira cette crainte si les paires de candidats couvrent deux anciens cantons réunis en un seul ! Notons par ailleurs que si le redécoupage électoral conduit à la fusion de trois anciens cantons ou plus, on peut penser que certains citoyens vont inévitablement y perdre car ils seront moins bien représentés.

A l'occasion du redécoupage des cantons, la presse a pu se faire l'écho de tels arguments. L'édition du Morbihan du vendredi 14 Novembre 2014 du journal *Ouest-France* reprenait ainsi les propos de la conseillère générale du canton de Montauban de Bretagne, Marie Daugan, qui dénonçait une projet qu'elle qualifiait de "ruralicide". Dans le même article, Marie-Hélène Daucé, conseillère générale du canton de Bécherel, jugeait que la création de cantons de 30 000 habitants «...(allait) rompre le rapport de proximité entre l'élu et le citoyen. »

A cette préoccupation de distance<sup>21</sup>, vient s'ajouter la question du mécanisme de contrôle/discipline (*accountability, monitoring*) des élus : leurs incitations seront-elles toujours convenablement alignées sur les préférences des citoyens qu'ils représentent ? Le bon sens suggère que ce lien sera distendu puisque le nouveau territoire sera représenté par deux personnes au lieu d'une seule. En effet tout scrutin de liste (et le scrutin binominal en est un) a tendance à déplacer le regard de l'élu du citoyen électeur vers le parti (Carey et Shugart 1995). Il est plus facile de voir ce que fait le maire de sa commune de résidence que l'action de son conseiller général et *a fortiori* d'un binôme de conseillers départementaux.

L'analyse des coûts d'agence a fait l'objet de recherches en science politique formelle (Ferejohn 1986) mais l'examen des conséquences des détails du mécanisme électoral sur l'amplitude de ceux-ci n'a pas fait l'objet d'une investigation théorique. Plusieurs arguments sont mentionnés dans la littérature pour dire que les systèmes pro-

---

21. Aux questions de nature idéologique de type  $G/D$ , s'ajoutent en effet (en particulier à l'échelon local) des débats de nature distributive. Une mission importante du conseil général (et du futur conseil départemental qui le remplace) est la distribution de certaines ressources publiques entre des territoires qui expriment, via leurs élus, des demandes (construction d'un pont, aménagement d'une route, subvention d'une piscine, etc...). On comprend dans ce cas l'importance d'être bien représenté au sein de l'assemblée (Ansolabehere et Snyder (2008)).



portionnels conduisent à des coûts d’agence plus importants : fragmentation plus grande du paysage politique et gouvernements de coalition plus instables, difficulté des électeurs à percevoir dans ce contexte les responsabilités de chaque partenaire, coûts de transaction au sein des cabinets, immobilisme accru (Tsebelis 2002), corruption plus élevée (Chang et Golden 2007), dépenses publiques plus importantes que nécessaires (Persson et Tabellini 2003).

La mesure pratique de ce coût d’agence n’est pas chose facile. Une façon naturelle de le faire est de mesurer l’écart entre les votes du ou des représentants d’un district et l’opinion médiane du district <sup>22</sup>. Si l’on se limite cependant à la préférence de l’électeur médian, on peut mesurer (sous réserve que les données de vote l’autorisent) la distance entre la position de celui-ci et celle du parti médian dans le gouvernement. Cette mesure est adoptée dans Portmann, Stadelmann et Eichenberger (2012) et Carey et Hix (2013) dans leur étude empirique de l’influence de la *district magnitude* sur le comportement des élus dans le parlement suisse. Certaines mesures empiriques de disresponsabilité sont plus discutables. Comme pour l’influence sur la parité, notons là aussi que faute d’une théorie adéquate, aucune mesure *ex ante* n’est disponible. En l’absence d’une telle mesure, on peut provisoirement suggérer, en conformité avec Portmann, Stadelmann et Eichenberger que la *district magnitude* peut constituer un “proxy” utile de  $I_4$ . Plus celle-ci est élevée plus l’*accountability* est basse. Puisque la *district magnitude* (à population fixe) varie inversement avec  $K$ , plus  $K$  est grand, plus petit est  $I_4$  !

## 4 Traitement analytique du cas symétrique

### 4.1 Préliminaires

Le traitement analytique complet du cas général est hors de portée. Il mêle plusieurs difficultés qu’il convient de distinguer. La première difficulté prend sa source dans le fait que la situation de départ n’est pas nécessairement symétrique. Tout d’abord, le couple d’entiers  $(n_k, r_k)$  peut varier d’un district à l’autre. Si l’architecte ne peut pas redessiner la carte des districts pour que tous les districts soient équilibreplés (ou presque équilibreplés modulo une tolérance raisonnable) alors la question du choix des entiers  $r_k$  (question de l’*apportionment*) devient une question fondamentale qui a fait l’objet d’une littérature abondante (voir Balinski et Young (2001) et Pukelshein (2010)). Une seconde source d’asymétrie tient au fait que le mécanisme peut varier d’un district à l’autre en fonction par exemple de paramètres exogènes : par exemple, les zones urbaines peuvent employer un mécanisme différent de celui employé dans les zones rurales.

Ici, s’agissant de l’approche analytique, nous allons passer sous silence ces deux difficultés et nous concentrer sur le cas où  $n_k = \frac{n}{K} = m$ ,  $r_k = \frac{R}{K} \equiv r$  et  $M_k = M$  pour tout  $k = 1, \dots, K$  où  $K$  est un entier pair. Nous allons même nous limiter au cas où  $r$  est égal à 1 ou à 2. En d’autres termes, nous nous concentrerons sur le cas d’un territoire divisé en districts équilibreplés et envoyant (de ce fait) un nombre égal de représentants à la chambre égal à 1 ou 2. En résumé, dans le cas d’école considéré ici, le mécanisme  $M$  est complètement décrit par :  $K$  le nombre de districts, la *district magnitude*  $r$  et la formule électorale  $\underline{M}$ . Ici quatre formules électorales peuvent être envisagées

$\underline{M}_0$  : scrutin majoritaire plurinominal avec listes ouvertes

---

22. Il n’est pas clair d’ailleurs qu’il faille choisir le citoyen médian comme citoyen de référence si la *district magnitude* est supérieure à 2. En effet dans ce cas, les élus du district représentent des catégories différentes de citoyens.

$\underline{M}_1$  : scrutin majoritaire plurinominal avec listes fermées

$\underline{M}_2$  : scrutin proportionnel au plus fort reste

$\underline{M}_3$  : scrutin proportionnel à la plus forte moyenne

Naturellement, dans le cas où  $r = 1$ , les quatre formules coïncident. Dans ce contexte, nous allons examiner quatre situations : la situation de départ (avant la mise en place de la réforme) et quatre situations d'arrivée (décrivant la situation après la mise en place d'une réforme). Les quatre situations d'arrivée comprennent la réforme qui a été effectivement choisie en France par le législateur et trois réformes alternatives qu'il aurait pu envisager.

**Situation de départ :**  $K$  districts et  $r_k = 1$  pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Les quatre formules coïncident avec le mécanisme majoritaire noté ci-après  $\underline{M}$ .

**Situation alternative :**  $\frac{K}{2}$  districts et  $r_k = 2$  pour tout  $k = 1, \dots, \frac{K}{2}$ . Les quatre réformes possibles sont décrites par les quatre formules électorales  $\underline{M}_i$   $i = 0, 1, 2, 3$  discutées précédemment. Nous supposons ici que l'affiliation partisane domine toute autre considération. Dans ce cas les mécanismes  $\underline{M}_0$  et  $\underline{M}_1$  sont équivalents et l'examen global portera donc sur quatre mécanismes possibles :  $(K, \underline{M})$ ,  $(\frac{K}{2}, \underline{M}_1)$ ,  $(\frac{K}{2}, \underline{M}_2)$  et  $(\frac{K}{2}, \underline{M}_3)$ .

Pour évaluer les qualités/défauts de ces quatre mécanismes, on souhaite procéder au calcul de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  et mettre alors en évidence les tradeoffs éventuels. Ces comparaisons seront conduites à l'aide de modèles probabilistes, présentés plus loin. Mais avant, pour se convaincre de la nécessité d'un modèle stochastique, commençons par montrer que pour  $i = 1, 2$  et  $3$ , il n'est pas possible de déterminer les signes de  $I_1((K, \underline{M}), P) - I_1((\frac{K}{2}, \underline{M}_i), P)$  et de  $I_2((K, \underline{M}), P) - I_2((\frac{K}{2}, \underline{M}_i), P)$  indépendants de  $P$ . Nous développons cet argument dans le cas de  $\underline{M}_1$  et  $\underline{M}_2$  (le cas de  $\underline{M}_3$  étant très similaire à celui de  $\underline{M}_2$ ).

### Passage au scrutin binominal au plus fort reste

Commençons par le cas où  $\underline{M}_i$  est le mécanisme  $\underline{M}_2$ . Puisque le nombre de représentants est alloué en fonction des scores des deux formations, on espère se rapprocher ainsi de l'opinion majoritaire par ce changement de mode de scrutin. Regardons de plus près ce qui se passe dans le cas où  $\frac{K}{2}$  est impair. Dans un superdistrict  $k$ ,  $G$  remporte les 2 sièges à coup sûr ssi  $\frac{n_k^G}{n_k^G + n_k^P} > 0.75$ . Sinon les deux sièges sont alloués à part égale entre les deux formations. Supposons que dans le superdistrict  $k$  la gauche l'emporte avec une marge confortable mais inférieure à 75%, disons 65%. Elle obtient un seul siège. Si dans tous les superdistricts sauf un (c'est-à-dire  $\frac{K}{2} - 1$  districts) il en va de même, elle assure  $(\frac{K}{2} - 1)$  sièges. Si dans le superdistrict où elle est battue, la droite fait "carton plein", disons 80%, alors la droite dispose de  $\frac{K}{2} + 1$  représentants. Sur l'ensemble du territoire, l'opinion est cependant majoritairement à gauche; elle fait en effet un score (en %) égal à  $\frac{65(\frac{K}{2} - 1) + 20}{\frac{K}{2}} = 65 - \frac{90}{K}$ . Si les superdistricts où la gauche gagne étaient homogènes dans le sens où les 65% se retrouvent dans chaque district, alors l'assemblée serait, avec  $K - 2$  représentants, largement à gauche dans le cas de  $K$  districts. Ici le passage de  $K$  à  $\frac{K}{2}$  a été mauvais du point de vue de  $I_1$ .

Il y a des situations où c'est l'inverse qui se produit. Par exemple, supposons que la droite batte la gauche dans une courte majorité de districts et est largement battue par la gauche dans les districts restants. Avec les  $K$  districts, l'assemblée est contraire au vote populaire. Avec  $\frac{K}{2}$  districts seulement, il en sera autrement car maintenant, dans

les districts perdus avant par  $G$ , les deux sièges seront distribués à chacun des deux camps.

Par conséquent, les effets du changement de  $K$  à  $\frac{K}{2}$  sont ambigus. Il y a des profils  $P$  où  $I_1(K, \underline{M}, P) = 1$  et  $I_1(\frac{K}{2}, \underline{M}_2, P) = 0$  et des profils  $P'$  où  $I_1(K, \underline{M}, P') = 0$  et  $I_1(\frac{K}{2}, \underline{M}_2, P') = 1$ .

De même, le passage de  $K$  à  $\frac{K}{2}$  peut augmenter ou diminuer la disproportionnalité. Si le profil  $P$  est tel que dans chaque district, la gauche l'emporte d'une courte longueur, alors, lorsqu'on passe de  $K$  districts à  $\frac{K}{2}$  superdistricts, l'indice de disproportionnalité verra sa valeur passer de  $\frac{1}{2} - \varepsilon$  à  $\varepsilon$ . L'inverse peut aussi se produire. Supposons  $K \geq 6$  et un profil  $P$  tel que (i) dans tous les districts sauf 2 la gauche l'emporte avec un score de 76% et (ii) la gauche perd les deux derniers avec un score de 26%. Dans ce cas, en passant de  $K$  districts à  $\frac{K}{2}$  superdistricts, l'indice de disproportionnalité augmente, passant de la valeur  $|\frac{1}{K} - \frac{24}{100}|$  à la valeur  $\frac{24}{100}$ , puisque  $\frac{1}{K} < \frac{24}{100}$ . Ce dernier cas est valide uniquement si  $K$  est suffisamment grand, mais le lecteur pourra sans difficulté retrouver des exemples de profils exhibant le même phénomène même pour  $K = 2$ .

Ainsi, toutes les évolutions possibles ont pu être mises en évidence lors du passage au scrutin binominal au plus fort reste ; les mêmes conclusions peuvent aisément être obtenues avec  $M_3$ , le scrutin binominal à la plus forte moyenne.

### Passage au scrutin binominal à liste fermée

Considérons maintenant le cas où  $\underline{M}_i$  est le mécanisme  $\underline{M}_1$ . S'agissant de la dismajorité, les deux cas sont possibles. Si le profil  $P$  est tel que dans une courte majorité de districts la gauche l'emporte d'une courte majorité, l'indice  $I_1$  verra sa valeur passer de 1 à 0 dans le passage de  $K$  à  $\frac{K}{2}$  si chaque district où elle gagne est apparié avec un district où la droite gagne largement ; on peut construire un tel profil où, dans l'opération, elle ne conserve que 2 sièges. En revanche dans le cas d'un profil  $P$  où la gauche l'emporte d'une petite majorité dans une petite majorité de districts, il se peut très bien que dans le passage de  $K$  à  $\frac{K}{2}$ , elle ne conserve que  $\frac{K}{4}$  sièges et perde ainsi la majorité. Dans ce cas l'indice  $I_1$  verra sa valeur passer de 0 à 1.

La même diversité de situations apparaît avec l'indice de disproportionnalité. La proportionnalité est mieux satisfaite avec  $K$  qu'avec  $\frac{K}{2}$  lorsque le profil est tel que dans presque tous les superdistricts, il y un district de chaque bord alors que tous les superdistricts sont du même bord. A l'inverse, considérons un profil  $P$  tel que la gauche gagne très nettement (disons à hauteur de 80%) un peu plus de la moitié des districts et perde les autres de peu. En pareil cas, l'indice de disproportionnalité mesurera la sous-représentation de la gauche. Supposons que dans le passage de  $K$  districts à  $\frac{K}{2}$  superdistricts, la gauche conserve tous les districts gagnés et gagne un et un seul superdistrict dont les districts étaient initialement partagés entre droite et gauche. Dans le changement, la gauche gagne un siège et voit sa sous-représentation diminuer à la marge conduisant à une diminution de la disproportionnalité.

#### 4.1.1 Hypothèses probabilistes

A l'aune de ces exemples, pour évaluer les qualités/défauts de ces quatre mécanismes, il nous faut considérer maintenant un modèle probabiliste de tirage des préférences. Pour ce faire, nous allons temporairement privilégier

le modèle IAC. Comme nous l’avons fait remarquer, son intérêt vient de ce qu’il donne la même probabilités d’occurrence à toutes les répartitions de  $n$  votants entre les deux partis. Cependant, il y a plusieurs façons de le décliner dans les détails, selon l’échelle (district ou superdistrict) où il s’applique :

- IAC\* : Tirage IAC à l’échelle de chacun des districts de départ, c’est-à-dire tirages IAC au sein de chaque district et indépendants entre les districts. La loi de répartitions des votes dans le superdistrict sera donc une toute nouvelle loi, à préciser, résultant des deux tirages indépendants dans chaque district.
- IAC\*\* : Tirage IAC à l’échelle de chacun des “superdistricts”, c’est-à-dire à tirages IAC au sein de chaque superdistrict et indépendants entre les superdistricts.

Notons qu’aucun de ces deux modèles ne s’apparente à la définition classique de IAC qui est défini par un tirage IAC au niveau de la population toute entière. Cette version classique de IAC impliquerait une corrélation entre les votes d’électeurs appartenant à toutes les échelles, alors qu’IAC\* impose des votes indépendants entre électeurs appartenant à des districts différents et IAC\*\* impose des votes indépendants entre électeurs appartenant à des superdistricts différents.

Ainsi, pour chacun des deux modèles stochastiques définis ci-dessus, nous souhaiterions idéalement calculer  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  pour les quatre mécanismes considérés. Ces 8 calculs soulèvent des problèmes combinatoires qui sont loin d’être immédiats. Avant cet article, personne n’avait entrepris le calcul de  $I_2(M)$  pour les modèles probabilistes et les mécanismes de vote les plus populaires. Le calcul (exact dans certains cas, ou approximé) de  $I_1(M)$  a été effectué par Feix et al. (2004), Lepelley et al. (2011) et May (1948) dans le cas où  $r = 1$  et sous l’hypothèse IAC\*. Si on souhaite importer leurs calculs dans notre article, il nous faut accepter de faire l’hypothèse que dans le passage de  $K$  à  $\frac{K}{2}$ , on change de modèle probabiliste en passant de IAC\* à IAC\*\*. Nous ne souhaitons pas aller dans cette direction mais notons cependant que, même dans ce cas, la comparaison n’est pas immédiate. En effet, en notant  $Pr(m, K)$  la probabilité d’une élection inversée dans le cas du modèle IAC\* appliqué à une population divisée en  $K$  districts chacun peuplé de  $m = \frac{n}{K}$  électeurs, il nous faudrait comparer  $Pr(\frac{n}{K}, K)$  et  $Pr(\frac{2n}{K}, \frac{K}{2})$ . Les calculs de ces auteurs suggèrent que la fonction  $Pr$  est une fonction croissante de ses deux arguments qui converge rapidement vers  $\frac{1}{6}$ . Mais ici, en variant  $K$ , on fait varier les deux arguments dans des directions opposées et on ne peut rien déduire immédiatement de ces résultats.

Dans le cas où le comportement électoral des superdistricts est lié à de celui des districts, le calcul des deux indices est compliqué. Commençons par examiner la voie d’IAC\*\*, c’est-à-dire le modèle IAC\* appliqué aux superdistricts. Dans ce cadre, le calcul des indices  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  pour les trois mécanismes décrivant les trois réformes sont assez conventionnels puisqu’ils s’appuient sur un modèle IAC\* à l’échelle du superdistrict. En revanche, le calcul de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  dans le cas du mécanisme utilisé avant la réforme est loin d’être immédiat puisqu’il nous faut spécifier quelle loi devrait s’appliquer dans chaque district. Comme nous l’expliquons dans l’appendice 1, le modèle IAC\* à l’échelle du superdistrict introduit une très forte corrélation entre les votes des deux districts composant le superdistrict et la caractérisation complète de la loi de probabilité décrivant la distribution des votes est pour l’heure hors de portée. De fait, pour l’heure, nous n’avons pas pu effectuer de calculs dans le cadre du modèle IAC\*\*.

Reste la voie du modèle IAC\*, où le comportement électoral dans le superdistrict découle directement de celui des districts. Nous expliquons notre méthode générale de calcul dans l'appendice 2, qui permettra d'obtenir les résultats présentés dans la section suivante. Cette méthode s'appuie sur des résultats développés dans Le Breton, Lepelley et Smaoui (2013).

Notons enfin que sous l'hypothèse que  $K$  est pair, la probabilité que la droite et la gauche aient le même nombre de représentants dans l'assemblée est non nulle pour les mécanismes  $\underline{M}_2$  et  $\underline{M}_3$  avant et après la réforme; en revanche, dans le cas du mécanisme  $\underline{M}_1$ , la probabilité d'un "tie" est nulle si  $\frac{K}{2}$  est impair. Sur la base d'un fichier d'élections cantonales, Lahrach et Merlin (2012) montrent que l'événement "tie" (appelé chez eux "deadlock") s'est produit au moins 4 fois lors de chaque élection cantonale depuis 1982. Certaines années le chiffre est nettement plus élevé et a même atteint la valeur record de 14 en 1988. Dans cet article, nous n'introduisons pas un cinquième indice pour mesurer cette potentielle faiblesse (car source d'instabilité) du mécanisme électoral. Nous consignons dans l'appendice 3 quelques calculs concernant cette probabilité pour les différents mécanismes. Il est intéressant de noter que cette question n'a pas été absente des préoccupations du législateur dans le cadre du passage au scrutin binominal paritaire puisque la commission des lois a voté l'introduction d'un nombre impair de cantons dans chaque département, ce qui se traduira par un canton supplémentaire dans 48 départements et, selon ses termes, *favorisera l'émergence d'une majorité en cas d'équilibre des forces dans le conseil départemental*.

## 4.2 Comparaison des trois mécanismes dans des cas simples

En raison des difficultés analytiques discutées ci-dessus, nous offrons dans cette section un calcul exact de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  pour les quatre mécanismes considérés ici dans des cas particuliers où l'analyse est possible. Du point de vue des tradeoffs, ces calculs révèlent déjà des différences intéressantes entre les mécanismes. Il est cependant prématuré de déduire de cette étude particulière des principes généraux pour toute valeur de  $K$ .

Le calcul procède en deux étapes. Dans une première étape, nous allons considérer le cas de 3 districts et procéder au calcul de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  dans le cas où la *district magnitude* est 1 puis dans le cas où la *district magnitude* est 2 pour chacune des 3 formules électorales envisagées. Dans une seconde étape, nous considérons 6 districts et produisons les calculs de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  pour les quatre mécanismes  $M$  considérés. Ce dernier calcul nous permet de comparer l'évolution des indices lorsque l'on passe de 6 districts à 3 superdistricts pour chacun des mécanismes. L'analyse est menée sous l'hypothèse IAC\* (c'est-à-dire IAC à l'échelle de chacun des districts) pour une valeur asymptotique de population. Notons que le modèle alternatif, *Impartial Culture* (IC) n'est guère approprié à la présente étude. Comme il suppose que chaque individu tire indépendamment des autres son orientation de droite ou de gauche avec probabilité  $1/2$ , il conduit mécaniquement à une population et à une chambre toujours clivée exactement, quelle que soit l'échelle considérée, district ou superdistrict. Si Feix et al. (2004) ont pu donner une estimation de  $I_1$  dans ce cas, qui tend rapidement vers 20,5% quand la population augmente,  $I_2$  sera lui toujours voisin de zéro quel que soit la formule  $\underline{M}_i$  retenue. En se concentrant sur des populations clivées, il ne permet pas d'étudier le système électoral dans des configurations de préférences plus variées.

TABLE 1 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K = 3$ ,  $r = 1$ ,  $M = \underline{M}$ .

$V_G$ $m^G$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	
0	$\frac{9}{2000}$	$\frac{31}{1000}$	$\frac{27}{500}$	$\frac{31}{1000}$	$\frac{9}{2000}$	0	0	0	0	0	1
1	0	$\frac{1}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{51}{400}$	$\frac{153}{1000}$	$\frac{117}{2000}$	$\frac{3}{750}$	0	0	0	
2	0	0	0	$\frac{3}{750}$	$\frac{117}{2000}$	$\frac{153}{1000}$	$\frac{51}{400}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	0	
3	0	0	0	0	0	$\frac{9}{2000}$	$\frac{31}{1000}$	$\frac{27}{500}$	$\frac{31}{1000}$	$\frac{9}{2000}$	
	$\frac{9}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{171}{2000}$	$\frac{325}{2000}$	$\frac{432}{2000}$	$\frac{432}{2000}$	$\frac{325}{2000}$	$\frac{500}{2000}$	$\frac{1000}{2000}$	$\frac{2000}{2000}$	1

#### 4.2.1 Valeurs des indices dans trois districts de magnitude 2

Considérons donc en premier lieu un territoire composé de trois districts avec une *district magnitude* que nous prendrons égale à 1, puis à 2. L'objet de cette première étape est d'une part d'illustrer le calcul de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  dans le cas le plus simple qui soit, et d'autre part d'offrir une première analyse de l'impact de la *district magnitude* sur la performance de chaque formule électorale.

Si le calcul de  $I_1(M)$  repose sur des techniques éprouvées, celui de  $I_2(M)$  est nettement plus fastidieux car il impose la détermination préalable de la loi conjointe des variables  $V_G$  et  $m^G$ , qui rappelons-le, désignent respectivement la proportion d'électeurs de gauche sur le territoire et le nombre de représentants de gauche au conseil du territoire. Les calculs ont été effectués en prenant un pas de 10% pour la variable  $V_G$ . La Table 1 résume les résultats obtenus pour  $r = 1$  (dans ce cas les trois mécanismes coïncident évidemment).

La probabilité que la gauche obtienne entre 40% et 50% des voix sur le territoire (qui compte  $3m$  électeurs) et un siège au conseil territorial est ainsi de  $153/1000$ . Ce chiffre est obtenu en déterminant le volume du simplexe défini par les inégalités suivantes (où l'on a posé  $p_k^G = \frac{n_k^G}{m}$  et supposé  $m$  infini)<sup>23</sup> :

$$\frac{1}{2} < p_1^G \leq 1, 0 < p_2^G \leq \frac{1}{2}, 0 < p_3^G \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{6}{5} < p_1^G + p_2^G + p_3^G < \frac{3}{2},$$

ce qui donne  $51/1000$  et l'on obtient la probabilité de  $153/1000$  en multipliant par 3. Il y a donc une probabilité de 15,3% pour que la gauche obtienne (en moyenne) 45% des voix du territoire et seulement un tiers des conseillers, ce qui nous permet d'approximer un indice de disproportionnalité égal à  $\frac{9}{20} - \frac{1}{3} = \frac{7}{60}$  sur l'intervalle. On peut ainsi donner une approximation de  $I_2(M)$  de la manière suivante (en tenant compte de la symétrie de la Table 1) :

$$\begin{aligned} I_2(M) &\approx 2 \left( \frac{9}{2000} \times \frac{1}{20} + \frac{31}{1000} \times \frac{3}{20} + \frac{27}{500} \times \frac{1}{4} + \frac{31}{1000} \times \frac{7}{20} + \frac{9}{2000} \times \frac{9}{20} + \frac{1}{2000} \times \frac{11}{60} \right. \\ &\quad \left. + \frac{63}{2000} \times \frac{1}{12} + \frac{51}{400} \times \frac{1}{60} + \frac{153}{1000} \times \frac{7}{60} + \frac{3}{750} \times \frac{19}{60} + \frac{117}{2000} \times \frac{13}{60} \right) \\ &\approx \frac{4073}{30000} = 0,135766. \end{aligned}$$

Il est clair que la loi conjointe permet aussi de calculer  $I_1(M)$  puisque la dismajorité se produit quand (par exemple) la gauche est majoritaire en voix et minoritaire en sièges. On obtient de la Table 1 :

<sup>23</sup>. On notera que, compte tenu de nos hypothèses probabilistes, le volume associé à l'ensemble des situations possibles tend vers 1 quand  $m$  tend vers l'infini.

$$I_1(M) = 2\left(\frac{117}{2000} + \frac{3}{750}\right) = \frac{1}{8} = 0,125,$$

en accord avec le résultat obtenu par May (1948) et Feix et al (2004) pour 3 districts et  $m$  infini.

Nous supposons maintenant que chaque district envoie deux représentants au conseil départemental, soit  $r = 2$ . Si le mécanisme est  $\underline{M}_1$ , les probabilités de la Table 1 sont inchangées (les valeurs de  $m^G$  sont maintenant 0, 2, 4 et 6). Les indices  $I_1(\underline{M}_1)$  et  $I_2(\underline{M}_1)$  sont donc ceux que nous venons de calculer. Tel n'est plus le cas si l'on utilise les mécanismes  $\underline{M}_2$  ou  $\underline{M}_3$ .

Considérons en premier lieu  $\underline{M}_2$  (proportionnelle au plus fort reste). Dans ce cas, le district  $k$  obtient 0 représentant de gauche si  $n_k^G < m/4$ , 1 représentant si  $m/4 \leq n_k^G \leq 3m/4$  et 2 représentants si  $n_k^G > 3m/4$ . Appelons résultat du vote le vecteur  $(a, b, c)$  indiquant le nombre de représentants de gauche élus par chacun des districts. Les types de résultats associés à chaque valeur possible de  $m^G$  sont précisés ci-dessous.

$m^G$	Types de résultat	Nombre
0	(0,0,0)	1
1	(1,0,0)	3
2	(1,1,0) et (2,0,0)	3 et 3
3	(1,1,1) et (2,1,0)	1 et 6
4	(2,1,1) et (2,2,0)	3 et 3
5	(2,2,1)	3
6	(2,2,2)	1

Nous sommes alors en mesure de déterminer la loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$ . Par exemple, la probabilité que la gauche obtienne entre 20% et 30% des voix sur le territoire et deux sièges au conseil est obtenue en évaluant les volumes associés aux ensembles d'inéquations définis comme suit :

$$\frac{1}{4} \leq p_1^G \leq \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \leq p_2^G \leq \frac{3}{4}, 0 \leq p_3^G < \frac{1}{4}, \frac{3}{5} < p_1^G + p_2^G + p_3^G < \frac{9}{10}$$

et

$$\frac{3}{4} \leq p_1^G \leq 1, 0 \leq p_2^G < \frac{1}{4}, 0 \leq p_3^G < \frac{1}{4}, \frac{3}{5} < p_1^G + p_2^G + p_3^G < \frac{9}{10},$$

qui correspondent respectivement aux types de résultats (1, 1, 0) et (2, 0, 0). Nous obtenons  $\frac{159}{16000}$  pour le premier et  $\frac{9}{16000}$  pour le second. La probabilité recherchée est donc donnée par :

$$3 \times \frac{159}{16000} + 3 \times \frac{9}{16000} = \frac{63}{2000}.$$

La Table 2 résume les résultats. Comme l'on pouvait s'y attendre, le mécanisme  $\underline{M}_2$  réduit la disproportionnalité, puisque nous obtenons :

$$I_2(\underline{M}_2) \approx 0,0716104,$$

contre 0,136 pour le mécanisme  $\underline{M}_1$ ... mais cet avantage se paye par une augmentation sensible du risque de dismajorité. Nous avons en effet (on supposera qu'en cas d'égalité gauche-droite au conseil, les décisions sont tirées au sort) :

TABLE 2 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K = 3$ ,  $r = 2$ ,  $M = \underline{M}_2$ .

$V_G$ $m^G$	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	
0	$\frac{71}{16000}$	$\frac{17}{1600}$	$\frac{9}{16000}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{1}{16000}$	$\frac{163}{8000}$	$\frac{423}{2000}$	$\frac{163}{8000}$	$\frac{1}{16000}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{32}$
2	0	$\frac{1}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{239}{2000}$	$\frac{1201}{16000}$	$\frac{1}{128}$	0	0	0	0	$\frac{15}{64}$
3	0	0	$\frac{9}{16000}$	$\frac{181}{8000}$	$\frac{2129}{16000}$	$\frac{128}{16000}$	$\frac{181}{8000}$	$\frac{9}{16000}$	0	0	$\frac{5}{16}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1201}{16000}$	$\frac{239}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{1}{16000}$	0	$\frac{15}{64}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16000}$	$\frac{163}{8000}$	$\frac{423}{8000}$	$\frac{163}{8000}$	$\frac{1}{16000}$	$\frac{3}{32}$
6	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{9}{16000}$	$\frac{17}{16000}$	$\frac{71}{16000}$	$\frac{1}{64}$
	$\frac{9}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{171}{2000}$	$\frac{325}{2000}$	$\frac{432}{2000}$	$\frac{432}{2000}$	$\frac{325}{2000}$	$\frac{171}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{9}{2000}$	1

TABLE 3 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K = 3$ ,  $r = 2$ ,  $M = \underline{M}_3$ .

$V_G$ $m^G$	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	
0	$\frac{9}{2000}$	$\frac{1189}{54000}$	$\frac{559}{54000}$	$\frac{1}{6000}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{64}$
1	0	$\frac{96}{10125}$	$\frac{843}{13500}$	$\frac{57}{1500}$	$\frac{12}{10125}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{32}$
2	0	0	$\frac{343}{27000}$	$\frac{23}{200}$	$\frac{809}{9000}$	$\frac{1}{216}$	0	0	0	0	$\frac{15}{64}$
3	0	0	0	$\frac{7}{750}$	$\frac{406}{3375}$	$\frac{7}{406}$	$\frac{7}{750}$	0	0	0	$\frac{5}{16}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{809}{9000}$	$\frac{23}{200}$	$\frac{343}{27000}$	0	0	$\frac{15}{64}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{12}{10125}$	$\frac{57}{1500}$	$\frac{843}{13500}$	$\frac{96}{54000}$	0	$\frac{3}{32}$
6	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6000}$	$\frac{559}{54000}$	$\frac{10125}{1189}$	$\frac{9}{2000}$	$\frac{1}{64}$
	$\frac{9}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{171}{2000}$	$\frac{325}{2000}$	$\frac{432}{2000}$	$\frac{432}{2000}$	$\frac{325}{2000}$	$\frac{171}{2000}$	$\frac{63}{2000}$	$\frac{9}{2000}$	1

$$I_1(\underline{M}_2) = 2\left(\frac{1}{128}\right) + \frac{2129}{16000} + \frac{181}{8000} + \frac{9}{16000} = \frac{11}{64} = 0,171875,$$

contre 0,125 pour  $\underline{M}_1$ . Notons toutefois que cette valeur s'explique en grande partie à cause des situations dans lesquelles chaque camp obtient trois sièges. Supposer que le vainqueur est tiré au sort avec une pièce non truquée revient alors à créer une dismajorité une fois sur deux. Une version plus faible serait de ne considérer comme paradoxaux que les cas pour lesquels le parti majoritaire obtient 2 sièges ou moins. Nous définissons alors

$$\tilde{I}_1(\underline{M}_2) = \frac{2}{128} = 0,015625$$

Nous considérons maintenant le mécanisme  $\underline{M}_3$ . L'analyse est identique à celle que nous avons menée pour le mécanisme  $\underline{M}_2$ , avec cette différence que le district  $k$  obtient 0 représentant de gauche si  $n_k^G < m/3$  (au lieu de  $n_k^G < m/4$ ), 1 représentant si  $m/3 \leq n_k^G \leq 2m/3$  et 2 représentants si  $n_k^G > 2m/3$ . Les résultats obtenus pour la loi conjointe  $V_G$  et  $m^G$  sont présentés dans la Table 3. Les valeurs de  $I_1(\underline{M}_3)$ ,  $\tilde{I}_1(\underline{M}_3)$  et  $\tilde{I}_2(\underline{M}_3)$  sont directement regroupées dans la table 4, qui présente la synthèse des résultats obtenus pour trois districts de magnitude 2.

Le scrutin proportionnel à la plus forte moyenne,  $M_2$ , apparaît dans le cas considéré, et parmi les trois mécanismes étudiés, comme celui qui offre le meilleur compromis entre dismajorité et disproportionnalité : la valeur de l'indice de disproportionnalité est la plus faible, et la probabilité d'élection inversée est la plus faible. Par contre, si



TABLE 4 – Une synthèse des valeurs des indices pour 3 districts de magnitude 2.

Paramètres	$I_1(\underline{M}_i)$	$\tilde{I}_1(\underline{M}_i)$	$I_2(\underline{M}_i)$
$K = 3 r = 1 M = \underline{M}$	0,12500	0,12500	0,13576
$K = 3 r = 2 M = \underline{M}_1$	0,12500	0,12500	0,13576
$K = 3 r = 2 M = \underline{M}_2$	0,17187	0,01562	0,07161
$K = 3 r = 2 M = \underline{M}_3$	0,13888	0,00925	0,13576

TABLE 5 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K = 6, r = 1, M = \underline{M}$ .

$V_G$ $m^G$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	
0	$\frac{311}{4800000}$	$\frac{931}{300000}$	$\frac{7431}{800000}$	$\frac{931}{162337}$	$\frac{311}{480000}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{1}{12000000}$	$\frac{2443}{250000}$	$\frac{80000}{419682}$	$\frac{300000}{17269}$	$\frac{480000}{98401}$	$\frac{1}{150359}$	0	0	0	0	$\frac{32}{15}$
2	0	$\frac{1}{750000}$	$\frac{1600000}{42951}$	$\frac{300000}{21089}$	$\frac{800000}{297071}$	$\frac{7680}{341209}$	$\frac{12}{140625}$	0	0	0	$\frac{64}{5}$
3	0	0	$\frac{800000}{81}$	$\frac{200000}{4000000}$	$\frac{2400000}{150000}$	$\frac{800000}{341209}$	$\frac{140625}{21089}$	$\frac{81}{400000}$	0	0	$\frac{16}{3}$
4	0	0	0	$\frac{150000}{12}$	$\frac{2400000}{150359}$	$\frac{2400000}{341209}$	$\frac{150000}{17269}$	$\frac{400000}{42951}$	$\frac{1}{750000}$	0	$\frac{16}{3}$
5	0	0	0	140625	$\frac{800000}{1}$	$\frac{2400000}{98401}$	$\frac{200000}{162337}$	$\frac{800000}{419682}$	$\frac{750000}{2443}$	$\frac{1}{12000000}$	$\frac{64}{3}$
6	0	0	0	0	7680	$\frac{800000}{311}$	$\frac{300000}{931}$	$\frac{1600000}{7431}$	$\frac{250000}{931}$	$\frac{12000000}{311}$	$\frac{32}{1}$
	$\frac{81}{1250000}$	$\frac{15307}{3750000}$	$\frac{10227}{250000}$	$\frac{118279}{750000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{480000}{75000}$	$\frac{300000}{750000}$	$\frac{800000}{250000}$	$\frac{300000}{3750000}$	$\frac{480000}{1250000}$	$\frac{64}{1}$

l'on ajoutait comme cinquième critère la *décisivité*, ce mécanisme est celui qui produit le plus souvent une égalité 3 sièges contre 3.

#### 4.2.2 Le passage de 6 districts à 3 districts de magnitude 2

On s'efforce maintenant d'évaluer l'impact du passage au scrutin binominal sur la valeur des indices  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$ . On considère pour cela un territoire composé au départ de six districts. Il y a  $m$  votants par district et, dans la situation initiale, chacun des districts élit un représentant à la majorité des voix. On rappelle que dans chaque district le tirage du résultat obéit à l'hypothèse IAC, et comme les tirages sont indépendants, nous sommes bien dans le cas IAC\*. On commence par calculer la valeur de nos deux indices dans un tel contexte. La loi conjointe des variables  $m^G$  et  $V_G$  est précisée dans la Table 5.

On vérifiera aisément que l'on obtient (en supposant qu'avec trois représentants de chaque bord, les décisions sont tirées au sort) :

$$I_1(\underline{M}) = 0,194271, \tilde{I}_1(\underline{M}) = 0,038020, I_2(\underline{M}) \approx 0,09724.$$

On suppose ensuite que les districts sont regroupés deux par deux pour constituer trois superdistricts (le premier est constitué des districts 1 et 2, le deuxième des districts 3 et 4 et le troisième des districts 5 et 6). Chaque superdistrict a  $2m$  électeurs qui élisent deux représentants. Les valeurs de  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  vont alors dépendre du mode de scrutin :  $M_1$ , le scrutin de liste fermé,  $M_2$  la proportionnelle au plus fort reste et  $M_3$  la proportionnelle à la plus forte moyenne. La synthèse des résultats est présentée Table 6. Le détail des calculs, qui obéissent à la même logique que précédemment, est présenté en annexe.

TABLE 6 – L'évolution des indices lors du passage de 6 à 3 districts

Paramètres	$I_1(\underline{M}_i)$	$\tilde{I}_1(\underline{M}_i)$	$I_2(\underline{M}_i)$
$K = 6 r = 1 M = \underline{M}$	0,194271	<i>0,038020</i>	0,097246
$K = 6/2 r = 2 M = \underline{M}_1$	0,158333	<i>0,158333</i>	0,168879
$K = 6/2 r = 2 M = \underline{M}_2$	0,264713	<i>0,018619</i>	0,072623
$K = 6/2 r = 2 M = \underline{M}_3$	0,181344	<i>0,013305</i>	0,087935

Le mécanisme 3 apparaît là encore comme le meilleur compromis : il réduit (légèrement) à la fois le risque de dismajorité et la disproportionnalité par rapport à la situation initiale (6 districts, 1 représentant par district). Ce résultat est cependant à prendre avec précaution, pour une raison déjà évoquée précédemment : il existe une correspondance forte entre l'indice de Gallagher et la méthode d'Hamilton, au sens où dans la famille des règles proportionnelles, cet indice est précisément minimal pour cette méthode. Si l'on avait retenu comme mesure de la disproportionnalité l'indice de Sainte Laguë, c'est tout aussi mécaniquement que la méthode de la plus forte moyenne aurait été favorisée. Une seconde objection tient à ce qu'avec une magnitude de 2, il est extrêmement difficile pour un parti d'obtenir deux sièges, et la fréquence des situations de parfaite égalité explose. Une voie, non explorée dans cet article, serait de faire chuter le seuil à partir duquel le vainqueur obtient deux sièges, par exemple à 60%, 55%, ou 52%. Nous pourrions alors examiner l'évolution des indices à mesure que le système proportionnel se rapproche de plus en plus de  $\underline{M}_1$ , ce qui nous donnerait alors une vision encore plus fine des arbitrages possibles.

## 5 Traitement par simulations du cas asymétrique

Dans la section précédente, nous avons procédé au calcul analytique des indices dans le cas d'un modèle aléatoire symétrique très important mais dont la motivation est principalement théorique. Pour évaluer empiriquement la qualité d'un mécanisme électoral  $M$  à l'aune des indices  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  nous allons développer dans cette section un modèle aléatoire plus flexible (entendant par là décrit par un grand nombre de paramètres que le statisticien devra estimer) qui décrit au mieux les probabilités des différents profils susceptibles d'émerger au moment de l'élection. Pour ce faire, il convient tout d'abord d'exploiter le fichier historique des élections dans la zone considérée et d'inférer statistiquement les valeurs des paramètres du modèle. La construction d'un tel modèle pose de nombreuses questions statistiques. Cependant, quelles que soient les nuances, la mise en pratique de cette approche statistique procède généralement comme suit.

### 5.1 Vers un modèle géographique du vote : variations sur les modèles de chocs gaussiens de Theil et Merrill

On considère l'ensemble des cantons  $k = 1, \dots, K$  d'un département donné. L'ensemble des élections sur une période donnée nous donne des informations statistiques pertinentes pour l'analyse des élections cantonales. En notant  $T$  le nombre d'élections couvertes, on notera  $m_{kt}$  le nombre d'électeurs du canton  $k$  qui se sont exprimés dans l'élection  $t$ ,  $n_{kt}^G$  le nombre d'électeurs du canton  $k$  qui ont voté à gauche dans l'élection  $t$  et  $n_{kt}^D$  le nombre

d'électeurs du canton  $k$  qui ont voté à droite dans l'élection  $t$ . Pour chaque département, on dispose donc d'un fichier comprenant  $3TK$  données. Quel modèle aléatoire peut-on songer à estimer grâce à ce fichier ?

Dans cette section, nous allons nous écarter sensiblement du cadre retenu jusqu'à présent et considérer un modèle stochastique, où, dans chaque canton  $k$  (ou, plus généralement, chaque territoire considéré dans la partition initiale si le canton n'est pas l'unité de cette partition), la variable modélisée est la proportion d'électeurs  $p_{kt}^G$  votant à gauche dans le canton  $k$  et pour l'élection  $t$  et non  $n_{kt}^G$ , le nombre d'électeurs du canton  $k$  qui ont voté à gauche dans l'élection  $t$  :  $p_{kt}^G = \frac{n_{kt}^G}{m_{kt}}$  est naturellement comprise entre 0 et 1.

En cela, nous empruntons un chemin proche de celui suivi par Merrill III dans une série de papiers (1977, 1978) sur l'estimation de certains paradoxes du vote dans le cadre du collège électoral Américain et par Theil (1970) dans son étude de la relation voix/sièges et la loi du cube. Leurs modèles, assez proches, reposent sur deux principes communs :

- Premièrement, ils posent que la réalisation d'une probabilité  $p_{kt}^G$  dans un territoire donné pour une élection donnée est gouvernée par l'expression d'une variable latente qui dépend d'un effet national et d'un effet local ;
- Deuxièmement, ils veulent prendre en compte un fait stylisé bien connu de la science politique américaine : lorsque le balancier penche en faveur d'un parti au niveau national, ses gains sont plus forts dans les territoires où il est faible que dans les territoires où il est fort. L'interprétation qu'en donne Theil est qu'il est plus difficile de convaincre pour un parti de nouveaux électeurs lorsque la vaste majorité d'entre eux le soutient déjà.

Ainsi, Theil (1970) suppose que :

$$\ln \frac{p_{kt}^G}{1 - p_{kt}^G} = \alpha_k + \beta_t$$

où  $\alpha_k$  et  $\beta_t$  regroupent respectivement les paramètres locaux et les paramètres nationaux expliquant le vote. Plus loin dans son article, il introduit la fonction de répartition décrivant le paramètre  $\alpha$  au sein de la population des districts sans faire d'hypothèse explicite sur celle-ci hormis quelques hypothèses de régularité. La loi du second paramètre n'est pas a priori spécifiée. L'intérêt de cette spécification est d'exprimer  $p_{kt}^G$  comme :

$$p_{kt}^G = \frac{e^{\alpha_k + \beta_k}}{1 + e^{\alpha_k + \beta_k}}$$

ce qui permet bien de retrouver la sensibilité plus grande  $p_{kt}^G$  aux chocs aléatoires positifs sur la tendance nationale  $\beta_k$  lorsque cette probabilité est faible.

Pour sa part, Merrill introduit une variable de perturbation  $Z_{kt}$  définie comme suit<sup>24</sup> :

$$\psi(p_{kt}^G) - \psi(p_t^G) = Z_{kt}$$

où  $p_t^G$  désigne la proportion d'électeurs de gauche dans l'ensemble du département pour l'élection  $t$  et  $\psi$  est une fonction de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans ses articles, Merrill suppose précisément que les variables  $Z_{kt}$ ,  $t = 1, \dots, T$  sont les réalisations de variables aléatoires gaussiennes  $N(\mu_k, \sigma_k)$  indépendantes entre elles et que  $\psi(p) = \frac{1}{4} \ln \frac{p}{1-p}$ .

---

24. Chez Merrill,  $k$  est l'indice de l'état et le département est remplacé par la nation.

Après avoir noté que  $\psi'(\frac{1}{2}) = 1$  lorsque le coefficient est  $\frac{1}{4}$ , il justifie son choix par des arguments statistiques. En identifiant  $Z_{kt}$  (resp.  $\Psi(p_t^G)$ ) avec  $\alpha_t$  (resp.  $\beta_t$ ) on retrouvera une spécification logistique similaire de  $p_{tk}^G$  à un facteur d'échelle près :

$$p_{kt}^G = \frac{e^{4(\alpha_k + \beta_k)}}{1 + e^{4(\alpha_k + \beta_k)}}$$

L'un et l'autre dans leurs applications considèrent des masses de probabilités (du paramètre  $\beta$  chez Theil ou du vote national  $p_t^G$  chez Merrill) très centrées autour de la valeur centrale. Ils développent leurs résultats empiriques sur cette base. Ils ne sont pas à proprement parler intéressés par le fait d'avoir un modèle clos. Même si cela n'est pas complètement discuté dans leurs papiers, on est en droit de supposer qu'ils font l'hypothèse que la performance nationale d'un parti relève d'un modèle statistique indépendant de celui qui est utilisé pour aborder la dimension idiosyncratique à l'échelle des districts. On commence donc par extraire des données la tendance nationale et on cherche seulement à expliquer la partie résiduelle avec le modèle proposé. En pratique, chez Merrill cela suppose pour chaque état  $k$  et chaque élection  $t$  d'utiliser la valeur observée de  $Z_{kt}$  et d'en déduire les valeurs de  $\mu_k$  et  $\sigma_k$ . Par exemple, sur un ensemble de 18 élections US couvrant la période 1900-1972, Merrill a estimé  $\mu_k$  et  $\sigma_k$  pour tous les États (voir sa table 1).

Dans cet article, nous allons développer un modèle de géographie électorale clairement inspiré de leurs modèles dans le sens où il retient la spécification logistique. En revanche, nous considérons ici un modèle statistique qui génère à chaque élection le résultat de l'élection dans chaque canton et donc aussi dans l'ensemble du département. Le modèle est fermé : nous ne gardons pas explicitement un paramètre qui jouerait le rôle de  $\beta_t$  et générerait, à l'aide d'une modèle adéquat, une tendance départementale ou nationale se superposant à la tendance locale.

Précisément, on suppose que la proportion d'électeurs de gauche dans chaque canton est tirée selon une loi de probabilité décrite comme suit. On commence par considérer un vecteur gaussien  $X = N(\mu, \Omega)$  de dimension  $K$  :  $\mu \in \mathbb{R}^K$  et  $\Omega \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$  désignent respectivement le vecteur moyenne et la matrice de variances-covariances de  $X$ . Le vecteur  $X$  est transformé en un vecteur  $p$  dans  $[0, 1]^K$  à l'aide de la transformation ci-dessous :

$$p_k = \varphi(X_k) = \frac{e^{\frac{X_k}{4}}}{e^{\frac{X_k}{4}} + 1} \text{ pour } k = 1, \dots, K$$

A l'inverse, connaissant le vecteur  $p$ , on peut retrouver, pour chaque  $k = 1, \dots, K$ , les valeurs de la variable  $X_k$  à l'aide de la transformation inverse<sup>25</sup> :

$$\phi(p_k) = 4 \ln \frac{p_k}{1 - p_k}$$

Si l'on souhaite cependant rendre compte d'une tendance nationale du type de celle considérée par Merrill et Theil, on peut le cas échéant se concentrer principalement sur le cas particulier suivant. On considère au départ un vecteur aléatoire gaussien  $Y$  de taille  $K + 1$  dont les coordonnées sont indépendantes d'où l'on déduit un vecteur gaussien  $X$  en considérant la transformation linéaire :  $X_k = Y_k + Y_{K+1}$ . La dernière variable  $Y_{K+1}$  joue alors le rôle d'une

25. On notera qu'ici au lieu de diviser  $\ln \frac{p}{1-p}$  par 4, nous l'avons multiplié par 4. Ceci n'a aucune espèce d'importance dans le cas du modèle qui nous occupe qui est, répétons-le, fermé. L'analyse purement statistique du modèle proposé n'est pas effectuée ici. Notons cependant qu'il n'est pas identifiable. Si nous multiplions par une constante  $\rho$  la fonction  $\ln \frac{p}{1-p}$ , il est impossible sur la base des données de faire une différence entre les vecteurs des paramètres  $(\rho, \mu, \Omega)$  et  $(1, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\Omega}{\rho})$ . Encore une fois, les questions d'identification, de normalité et d'estimation de notre modèle statistique ne sont pas au cœur de cet article.

tendance nationale commune. En notant,  $\theta_k, \lambda_k$  les paramètres de la  $k^{\text{ième}}$  coordonnée pour  $k = 1, \dots, K + 1$ , on obtient  $\mu_k = \theta_k + \theta_{K+1}$ ,  $\sigma_{kk}^2 \equiv \sigma_k^2 = \lambda_k^2 + \lambda_{K+1}^2$  et  $Cov(X_k, X_l) = \lambda_{K+1}^2$ . Il s'agit donc d'une spécification du modèle général où toutes les covariances sont supposées égales entre elles : cette hypothèse capture l'idée d'un déplacement du vote à gauche ou à droite consécutivement à un choc commun qui affecte donc dans la même direction tous les cantons. Dans le même ordre d'idée, rien n'empêche cependant de considérer à ce stade des matrices de variances-covariances plus générales où, à côté d'une covariance globale à l'échelle du département, figureraient des covariances locales capturant des interactions plus territorialisées.

## 5.2 Interprétation des paramètres

Pour comprendre ce qu'il est permis de faire avec ce modèle et expliquer en quoi les modèles IC et IAC se rapprochent de cas particuliers pour certaines spécifications, nous allons examiner séparément le rôle des lois marginales des variables  $p_k$  puis celui des covariances.

Le modèle retenu ici est plus général que le modèle IAC\* pour deux raisons. D'une part, la loi conjointe n'est plus le produit des lois marginales et nous autorise des covariances intercantoniales arbitraires (en particulier différentes de zéro). Par ailleurs au niveau des lois marginales (propres à chaque canton), le modèle généralise IAC dans deux directions. D'une part, il n'est plus symétrique : par exemple, si  $\mu_k > 0$ , le canton  $k$  est biaisé à gauche. D'autre part, la loi n'est plus uniforme. Si  $\sigma_k$  est très grand, alors la masse de probabilité est, comme dans le cas de la loi uniforme, relativement dispersée sur  $[0, 1]$  alors que si  $\sigma_k$  est très petit, la masse de probabilité est concentrée autour de la moyenne comme dans le modèle IC.

Supposons donc provisoirement que  $\sigma_{kl}^2 = 0$  pour tout  $k, l = 1, \dots, K$  avec  $k \neq l$ . La fonction de répartition  $F_k(p)$ , qui désigne la probabilité pour que la proportion d'électeurs votant à gauche soit inférieure ou égale à  $p$ , est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} \text{Probabilité } (\varphi(X_k) \leq p) &= \text{Probabilité } (X_k \leq \phi(p)) = \\ \text{Probabilité } (\mu_k + \sigma_k Z \leq \phi(p)) &= \text{Probabilité } (Z \leq \frac{\phi(p) - \mu_k}{\sigma_k}) \end{aligned}$$

où  $Z$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. On obtient donc :

$$F_k(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{4 \ln \frac{p}{1-p} - \mu_k}{\sigma_k}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Cette loi de probabilité est absolument continue sur l'intervalle  $[0, 1]$  et admet comme densité

$$\begin{aligned} f_k(p) &= 2 \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k \sqrt{\pi} p} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2} [4 \ln(\frac{p}{1-p}) - \mu_k]^2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2} \right) (p-1) \\ &= 2 \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2} [4 \ln(\frac{p}{1-p}) - \mu_k]^2} \frac{1}{p-p^2} \end{aligned}$$

Commençons par examiner le cas où la loi marginale n'est pas biaisée, c'est-à-dire ici :  $\mu_k = 0$ . Dans ce cas :

$$f_k(p) = 2 \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k \sqrt{\pi}} e^{-\frac{8}{\sigma_k^2} \ln^2(\frac{p}{1-p})} \frac{1}{p-p^2}$$

Il est intéressant d'examiner plus minutieusement l'influence de  $\sigma_k$  sur la densité  $f_k$ . Commençons par observer que plus  $\sigma_k$  est petit, plus la masse de probabilité va être concentrée autour de la valeur moyenne/médiane qui vaut ici  $\frac{1}{2}$ . Par exemple lorsque  $\sigma_k = 0,1$ , on obtient les fonctions de répartition et de densité reproduites sur la Figure 1.

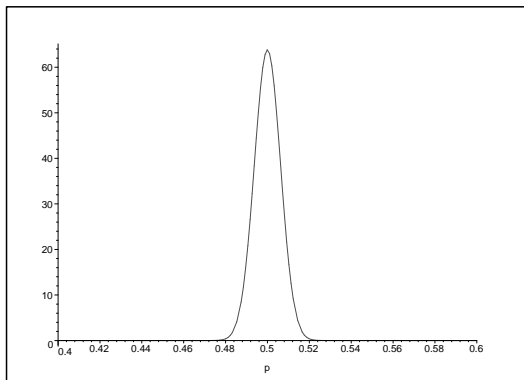


FIGURE 1 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 0,1$

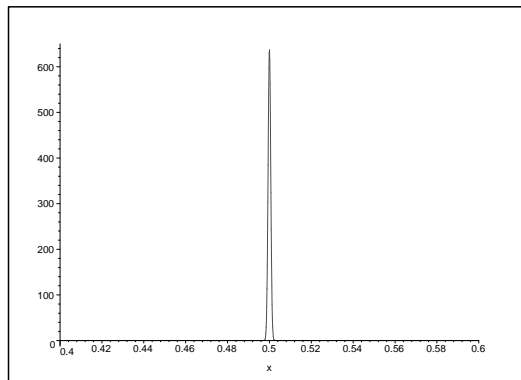


FIGURE 2 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 0,01$

Lorsque  $\sigma_k = 0,01$ , comme attendu, la fonction de densité de  $f_k$  est beaucoup plus piquée pour une petite valeur de  $\sigma_k$  (cf. Figure 2). Les ordres de grandeur, très petits au voisinage de  $p = 0,4$ , sont en effet très différents : on obtient  $F_k(0,4) = 5,0544 \times 10^{-56}$  lorsque  $\sigma_k = 0,1$  et  $F_k(0,4) = 8,2006 \times 10^{-5710}$  lorsque  $\sigma_k = 0,01$ . Il faut retenir que lorsque  $\sigma_k$  tend vers 0, la loi tend vers la masse de Dirac, c'est-à-dire le modèle *IC*. Avec quasi certitude, l'électorat du canton  $k$  sera divisé à parts égales entre les deux camps.

A l'inverse, lorsque la valeur devient de plus en plus élevée, la densité  $f_k$  prend une forme en *U* : la masse de probabilité se concentre sur les extrêmes de l'intervalle  $[0,1]$ . Par exemple lorsque  $\sigma_k = 10$  on obtient les fonctions de répartition et densité dont les graphes sont reproduits sur les Figures 3 et 4.

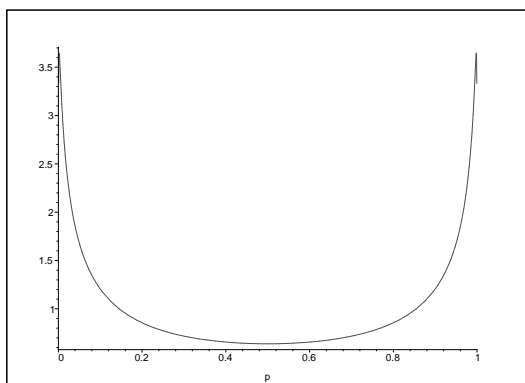


FIGURE 3 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 10$

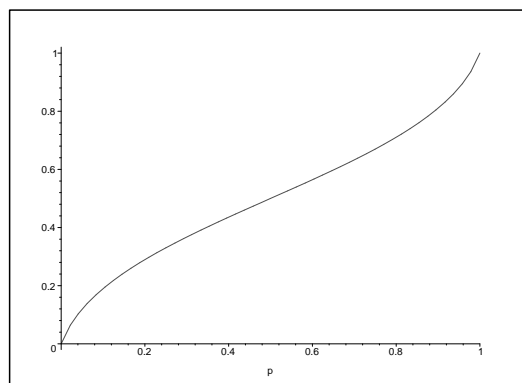


FIGURE 4 – Graphe de  $F_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 10$

On imagine aisément que pour des valeurs intermédiaires de  $\sigma_k$ , des situations plus nuancées vont voir le jour. Par exemple lorsque  $\sigma_k = 1$ , on obtient les fonctions de répartition et densité dont les graphes sont reproduits en Figures 5 et 6. On constate que la masse de probabilité est concentrée sur un intervalle central voisin de  $[0,3,0,7]$ . Notons cependant qu'ici :  $F(0,1) = 7,5517 \times 10^{-19}$  et  $F(0,3) = 3,5050 \times 10^{-4}$  à contraster avec les valeurs 0,1

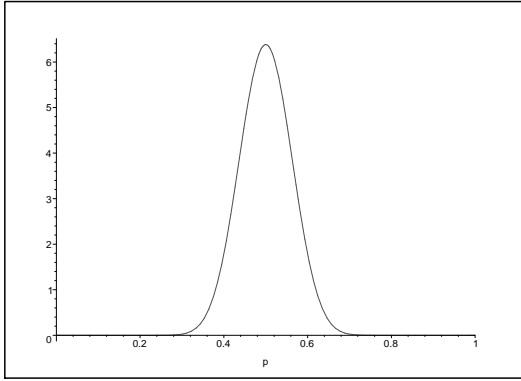


FIGURE 5 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 1$

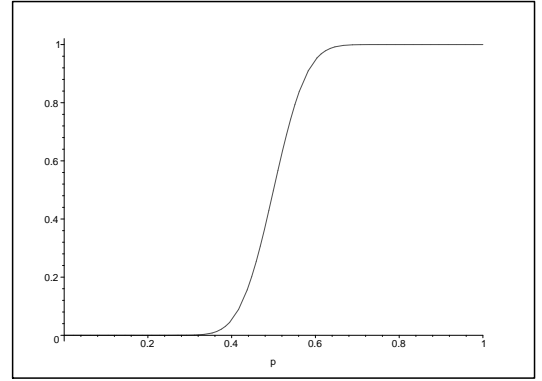


FIGURE 6 – Graphe de  $F_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 1$

et 0,3 obtenues avec le modèle IAC conventionnel. Ces quelques essais laissent entrevoir l'existence d'une valeur critique de  $\sigma_k$  pour laquelle la densité change de nature, passant d'un profil où la masse de probabilité bascule du centre vers les extrêmes. Autour de cette valeur critique, on devrait donc retrouver (par continuité) une densité pas trop éloignée de la densité uniforme sur  $[0, 1]$  qui définit le modèle IAC. Vérifions-le en considérant  $\sigma_k = 5$  et  $\sigma_k = 6$ ; on obtient les fonctions de répartition dont les graphes sont reproduits en Figures 7 et 8.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{4 \ln \frac{p}{1-p}}{\sigma_k}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, 2 \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k \sqrt{\pi}} e^{-\frac{8}{\sigma_k^2} \ln^2(\frac{p}{1-p})} \frac{1}{p - p^2}$$

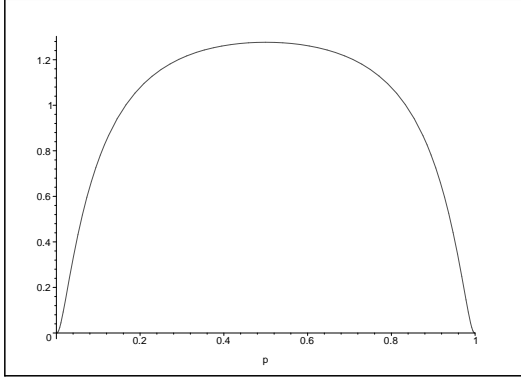


FIGURE 7 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 5$

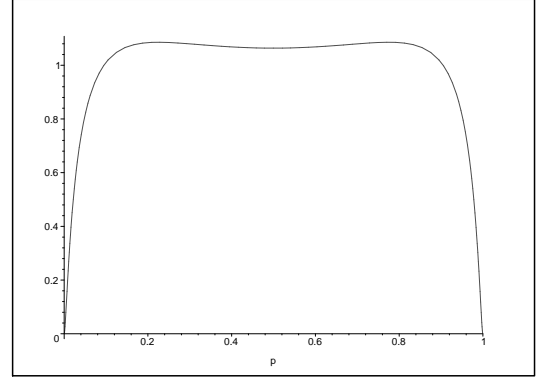


FIGURE 8 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 6$

On constate que la densité est presque uniforme sur une large portion de l'intervalle  $[0, 1]$  pour  $\sigma = 6$ . La dérivée seconde de  $f$  au point  $\frac{1}{2}$  s'annule pour  $\sigma = 4\sqrt{2} \approx 5.65$ , cette dernière valeur donne ainsi la meilleure approximation possible d'un modèle IAC dans le cadre de Merrill/Theil, comme le montre la Figure 9. Dès  $\sigma = 7$ , la courbe commence à se creuser plus significativement autour de  $p = \frac{1}{2}$  (voir Figure 10). Mais quelle que soit la spécification représentant une approximation adéquate du modèle IAC conventionnel, il ne peut être obtenu comme cas particulier du modèle de Merrill/Theil tel qu'il est développé ici.

Nous allons nous concentrer maintenant sur le rôle de  $\mu_k$ . Plus la valeur de  $\mu_k$  est élevée, plus la probabilité que la gauche gagne et de surcroît avec une marge élevée est importante. Intéressons nous à la victoire en tant que

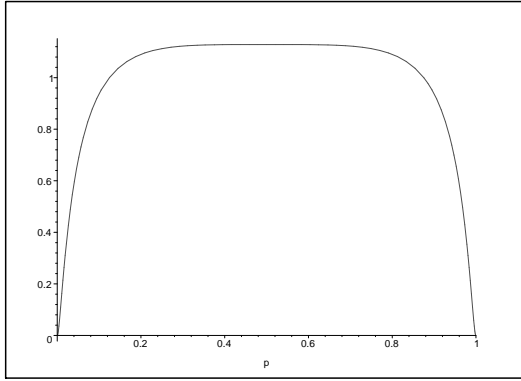


FIGURE 9 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 2\sqrt{2}$

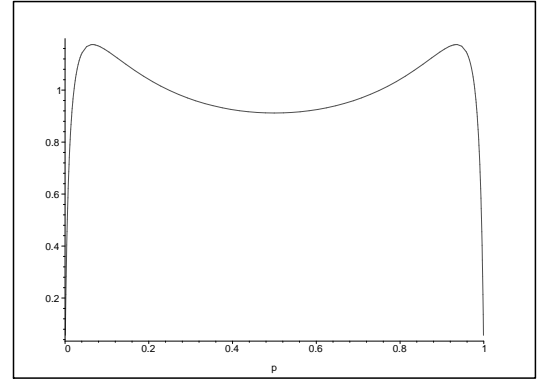


FIGURE 10 – Graphe de  $f_k$ ,  $\mu_k = 0$  et  $\sigma_k = 7$

telle pour plusieurs valeurs du paramètre  $\sigma_k$ . La probabilité de victoire de la gauche est donnée par la formule :

$$F_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_k}{\sigma_k}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On a représenté le graphe de cette fonction comme fonction de  $\mu_k$  lorsque  $\sigma_k = 1$  sur la Figure 11. La probabilité que la gauche gagne lorsque  $\mu_k = 1$  est de 84% et grimpe à 99% lorsque  $\mu_k = 3$ . En fait, lorsque  $\mu_k = 3$ , la probabilité que la gauche gagne avec un score au moins égal à 60% vaut 82%.

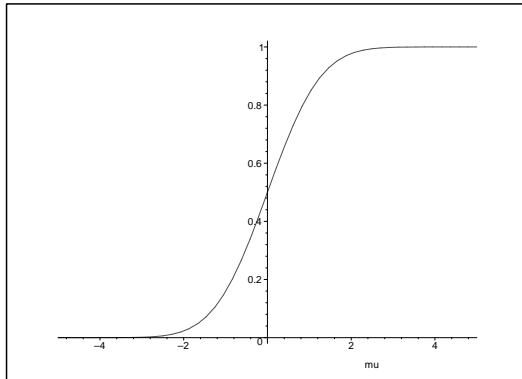


FIGURE 11 – Graphe de  $F_k\left(\frac{1}{2}\right)$  en fonction de  $\mu_k$  lorsque  $\sigma_k = 1$ .

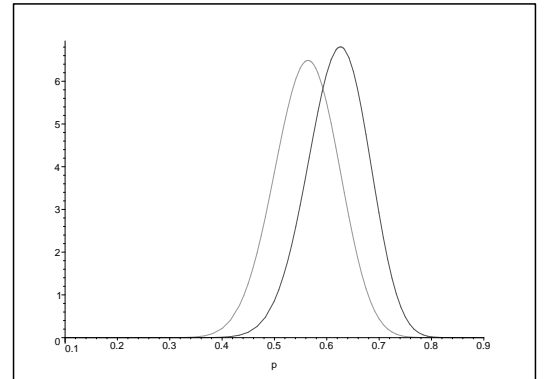


FIGURE 12 – Graphe de  $f_k$  lorsque  $\mu_k = 1$  et  $\mu_k = 2$  pour  $\sigma_k = 1$ .

Les graphes de la fonction de densité  $f_k(p)$  lorsque  $\sigma_k = 1$  et  $\mu_k$  prend respectivement les valeurs 1 et 2 sont :

$$2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2} [4 \ln(\frac{p}{1-p}) - 1]^2} \frac{1}{p - p^2}, \quad 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2} [4 \ln(\frac{p}{1-p}) - 2]^2} \frac{1}{p - p^2}$$

On obtient les graphes correspondants sur la Figure 12.

On pourrait étudier en détail cette distribution. On peut montrer que la médiane et la moyenne valent ici respectivement 0,5612 et 0,5641 pour  $\mu_k = 1$ . Dans le cas où  $\mu_k = 2$ , la médiane et la moyenne valent respectivement 0,6261 et 0,6207. À l'inverse, pour chaque valeur de  $\sigma_k$ , on peut calculer la valeur limite de  $\mu_k$  pour que l'élection se joue avec une chance au moins égale à un seuil critique raisonnable, par exemple 90%, dans un intervalle lui-même raisonnable, par exemple  $[0,48, 0,52]$ . Pour  $\sigma_k = 1$ , la valeur critique est la solution  $x \simeq 1,3247$  de l'équation :



$$\int_{0,48}^{0,52} 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}[4 \ln(\frac{p}{1-p}) - x]^2} \frac{1}{p - p^2} dp = 0,9$$

Bien entendu les deux paramètres  $\mu_k$  et  $\sigma_k$  interagissent pour déterminer la loi de probabilité du score de la gauche. La présentation séparées de l'influence des deux paramètres n'est donc qu'un artifice pédagogique permettant de comprendre le rôle des deux paramètres. Quoiqu'il en soit, il serait bon dans une élection d'avoir une idée claire des districts qui sont d'authentiques "cantons pivot" c'est à dire ceux pour lesquels l'élection n'est pas jouée dès le départ. Dans le cas où les covariances sont nulles, on pourrait convenir d'appeler "cantons pivots" les cantons  $k$  pour lesquels  $\mu_k$  et  $\sigma_k$  sont tels que :

$$\int_{0,48}^{0,52} 2 \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2}[4 \ln(\frac{p}{1-p}) - \mu_k]^2} \frac{1}{p - p^2} dp \leq 0,90$$

c'est à dire tels que dans seulement 10% des élections la gauche ou la droite l'a emporté avec un score supérieur à 52%. Il y a donc une forte chance pour que l'élection soit serrée. On pourrait sans doute abaisser le seuil et convenir qu'un canton est pivot si dans seulement 20% des élections la gauche ou la droite l'a emporté avec un score supérieur à 52%. La définition d'un canton pivot devient plus problématique lorsque les covariances ne sont pas nulles.

La présence de covariances non nulles a deux origines. La première, qui est celle qui retient l'attention de Merrill mais aussi de Theil, est celle d'un choc stochastique sur le vecteur latent  $X$  qui affecte<sup>26</sup> dans le même sens tous les cantons. Une telle covariance est bien entendu positive et donne lieu comme cela a été expliqué plus haut à une matrice de variances-covariances très particulière. La seconde source de covariance peut être plus locale. On peut très bien imaginer que des cantons présentant des profils identiques aient des votes corrélés positivement mais que ces votes soient corrélés moins positivement, voire négativement avec d'autres cantons. La classification des cantons en cantons ruraux d'une part et cantons urbains d'autre part est de ce point de vue un bon exemple de corrélation locale.

La spécification gaussienne retenue ici introduit (dans sa forme générale)  $\frac{K^2+3K}{2}$  paramètres à estimer. Nous n'allons pas aborder ici la phase délicate d'exploitation des fichiers électoraux pour estimer optimalement ces paramètres. Il est important de noter que lorsqu'on connaît la loi du vecteur gaussien  $X$  et le mécanisme électoral

---

26. Comme indiqué précédemment, Merrill utilise son modèle statistique pour évaluer dans le cas du collège électoral américain la probabilité du paradoxe de l'élection inversée et le pouvoir des électeurs en fonction de l'état de résidence. Nous avons privilégié ici une approche gaussienne. Mais bien entendu, nous pourrions considérer un tout autre jeu d'hypothèses. Par exemple, *IAC\** correspond au cas où les coordonnées du vecteur  $p$  sont indépendantes et suivent toutes une loi uniforme. Un modèle similaire au nôtre est aussi considéré par Neubauer, Schilling et Zeitlin (2012). Ils considèrent, dans le cas du collège électoral américain, un modèle générant le vecteur  $p$  défini ci-dessus comme suit. Lorsque  $T < K$ , où  $T$  désigne le nombre d'observations, ils calculent les  $T - 1$  valeurs propres  $\lambda_t$  et vecteurs propres  $E_t$  de la matrice de variances-covariances empiriques pour simuler le vecteur  $p$  comme suit. Le vecteur des électeurs de gauche dans chacun des états est donné par :

$$\mu + \sum_{t=1}^{T-1} z_t \sqrt{\lambda_t} E_t$$

où  $\mu$  est la valeur des moyennes empiriques et les variables  $z_t$  sont des variables gaussiennes centrées et réduites indépendantes. Avec ce modèle statistique, Neubauer, Schilling et Zeitlin estiment que la probabilité du paradoxe de l'élection inversée dans le cas du collège électoral américain est égale à 4.9%.

pour calculer les sièges remportés par la gauche (et donc par complémentation le nombre de sièges remportés par la droite), on peut déterminer la loi jointe du vecteur  $(p, S)$  où  $p \in [0, 1]$  et  $S \in \mathbb{N}$ .

L'événement  $\{p \leq \tilde{p} \leq p' \text{ et } S \leq \tilde{S} \leq S'\}$  s'interprète comme suit : "La gauche fait dans le département un score compris entre  $p$  et  $p'$  et remporte un nombre de sièges compris entre  $S$  et  $S'$ ". Les sièges continuent d'être représentés comme des variables entières mais si le nombre de sièges à pourvoir dans le district est très élevé, on pourrait retenir le pourcentage des sièges gagnés par la gauche. On obtiendrait de la sorte une loi de probabilité conjointe sur le carré unité  $[0, 1]^2$ . A partir de là on peut étudier plusieurs lois et fonctions : la loi marginale des voix, la loi marginale des sièges, la loi conditionnelle des voix sachant les sièges et le loi conditionnelle des sièges sachant les voix. On peut enfin calculer l'espérance conditionnelle du nombre (ou pourcentage) de sièges sachant le pourcentage des voix. On obtient ainsi une relation croissante de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  qui est la définition mathématique appropriée de ce que les politologues appellent la relation voix/sièges (*The Seats/Votes Curve*, Taagepera et Shugart (1988))

Le calcul explicite de cette loi conjointe est hors de portée et nous sommes les premiers (sauf erreur de notre part) à aborder le problème voix/sièges à ce niveau de généralité. Notons par ailleurs que la première des deux variables est continue. Dans ce qui suit, nous allons considérer une discrétisation de cette loi mais le pas de discrétisation peut être choisi aussi petit que l'on veut. Le calcul de la loi conjointe est effectué par un simulateur Monte Carlo programmé en R par Victor Le Breton (VLB). Il repose sur l'idée que si le nombre de simulations du vecteur gaussien est grand, d'après le théorème de Glivenko-Cantelli, l'histogramme empirique décrivant les différents événements élémentaires voix/sièges (en nombre fini après discrétisation) est voisin de l'histogramme exact.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser le simulateur VLB pour des situations artificielles (nombre, possiblement grand, de districts et variations des paramètres du Gaussien latent et du niveau de "malapportionnement") et réelles (nous nous concentrerons sur le département de l'Ariège) pour quatre formules électorales : un découpage en cantons avec une magnitude de 1 (le mode de scrutin utilisé jusqu'ici), un découpage en cantons avec une magnitude de 2 et scrutin binominal paritaire (le mode de scrutin utilisé en mars 2015) et deux autres formules électorales qui auraient pu être envisagées : une magnitude de 2 couplée avec une formule proportionnelle au plus fort reste ou à la plus forte moyenne.

### 5.3 Mise en bouche : le cas de trois districts

Dans cette sous-section, nous laissons de côté la question du découpage électoral et du changement conséquent de formule électorale pour nous concentrer sur les possibilités offertes par le simulateur VLB dans le cas le plus simple, ceci afin de nous concentrer sur la loi conjointe et le calcul de  $I_1$  et  $I_2$ .

Dans un premier temps, on suppose que tous les districts sont pivots c'est-à-dire que  $\mu = (0, 0, 0)$  et qu'il n'y a pas de problème de malapportionnement (chaque district a le même poids démographique et élit un et une seul représentant). Commençons aussi par le cas où les covariances sont toutes nulles pour nous concentrer sur le rôle des variances, rôle évoqué plus haut dans la discussion de la distribution de Merrill. La Table 7 présente les résultats obtenus dans le cas de  $10^5$  simulations, d'un pas de discrétisation égal à 10% et d'une matrice  $\Omega$  avec un écart-type égal à 6 dans tous les cantons (situation dans laquelle notre modèle se rapproche d'une simulation IAC\*).

TABLE 7 – Estimation de la relation Voix/Sièges pour 3 cantons,  $\mu_k = 0$ ,  $\sigma_k = 6$

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0018	0,0240	0,0550	0,0373	0,0055	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0001	0,0236	0,1238	0,1652	0,0588	0,0030	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0032	0,0593	0,1638	0,1246	0,0231	0,0001	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0055	0,0390	0,0575	0,0242	0,0019

TABLE 8 – Estimation de la relation Voix/Sièges pour 3 cantons,  $\mu_k = 0$ ,  $\sigma_k = 10$

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0205	0,0512	0,0400	0,0128	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0021	0,0485	0,1472	0,1309	0,0405	0,0033	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0033	0,0425	0,1318	0,1467	0,0492	0,0019	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0128	0,0411	0,0503	0,0206

On voit en particulier que la probabilité que la gauche soit minoritaire et remporte cependant deux des trois sièges est voisine de  $0,0593 + 0,0032 = 0,0625$ . Pour la droite, ce chiffre est estimé à  $0,0588 + 0,0030 = 0,0618$ . On obtient un  $I_1$  estimé à  $0,0625 + 0,0618 = 0,1243$ . Pas loin de la valeur théorique de  $\frac{1}{8} = 0,125$  obtenue pour le modèle IAC\* par Feix et al.(2004). L'indice  $I_2$  est quant à lui obtenu grâce au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 I_2 &\approx ,05(,0018+,0019)+,15(,024+,0242)+,25(,055+,0575)+,35(,0373+,0390)+,45(,0055+,0055) \\
 &+ \frac{11}{60}(,0001+,0001) + \frac{1}{12}(,0236+,0231) + \frac{1}{60}(,1238+,1246) + \frac{7}{60}(,1652+,1638) \\
 &+ \frac{19}{60}(,0032+,003) + \frac{13}{60}(,0593+,0588) \\
 &\approx 0,1412.
 \end{aligned}$$

Lorsque l'écart-type grimpe à la valeur 10, on obtient la loi estimée présentée Table 8. La probabilité que le parti minoritaire remporte cependant deux des trois sièges est maintenant voisine de  $0,0033 + 0,0425 + 0,0405 + 0,0033 = 0,0896$ . Soit, une très nette diminution de  $I_1$  ! L'indice  $I_2$  est lui aussi en diminution puisqu'on obtient après calcul  $I_2 = 0,1123$ . On remarque que certains événements négligeables avant prennent maintenant de l'importance : par exemple la probabilité que la gauche fasse moins de 10% et ne remporte aucun siège est désormais de l'ordre de 2%. A l'inverse, la probabilité pour la gauche de n'obtenir aucun siège avec entre 40% et 50% des voix est divisée par 4.

Lorsque l'écart-type tombe à la valeur  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ , on se rapproche du modèle IC et on obtient la Table 9. Désormais, la loi marginale des voix est concentrée sur l'intervalle [40%, 60%]. On voit que  $I_1$  est estimé à  $0,0808 + 0,0824 = 0,1632$ , proche de la valeur théorique de  $\frac{3 \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})}{\pi} - \frac{3}{4} = 0,16226$  obtenue pour le modèle IC par Feix et al.(2004). On observe par ailleurs sans surprise une augmentation de la disproportionnalité avec un indice estimé à  $I_2 = 0,2164$ . Ces observations sont confirmées par la Table 10 où la valeur de l'écart type tombe à  $\frac{1}{10}$  et où l'on a affiné le pas de discrétisation, qui passe de 10% à 5%. De fait, toute la masse de probabilité est concentrée dans

TABLE 9 – Estimation de la relation Voix/Sièges pour 3 cantons,  $\mu_k = 0$ ,  $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{10}}$

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1255	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2936	0,0824	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0808	0,2934	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1244	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

TABLE 10 – Zoom autour de 50%,  $\mu_k = 0$ ,  $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{10}}$

	[45,50]	[50,55]
[0]	0,1244	0,0000
[1]	0,2943	0,0806
[2]	0,0826	0,2927
[3]	0,0000	0,1254

l'intervalle [45,55]! On en déduit bien sûr  $I_1 = 0,1632$  et une valeur de  $I_2 = 0,2332$ .

Dans le tableau suivant (Table 11), nous examinons l'impact de la covariance (avec un écart-type de 10) en introduisant une corrélation uniforme et modérée. Ici le coefficient de corrélation est égal à 0,3. On voit ici que  $I_1$  tombe à la valeur  $0,00266 + 0,03414 + 0,034480 + 0,00322 = 0,0745$ . On obtient par ailleurs  $I_2 = 0,1169$ . On note que la masse de probabilité est plus étalée : par exemple la fréquence de l'événement "la gauche fait un score départemental entre 20 et 30% sans remporter de sièges" monte à 7.7% alors qu'elle était négligeable jusqu'à présent. Ce phénomène sera évidemment amplifié avec un coefficient de corrélation plus élevé.

Le cas limite de la corrélation parfaite (coefficient de corrélation égal à 1) avec un écart type de 10 conduit à la Table 12. Sans surprise, toute la masse de probabilité est concentrée sur les coins gauche/haut et droite/bas du tableau.

Nous abordons maintenant la question des biais partisans et des cantons pivots. Dans l'exemple décrit Table 13 l'écart-type est égal à 1, les covariances sont parfaites mais le canton 2 est biaisé à gauche alors que le canton 3 est biaisé à droite. Dans les deux cas, l'amplitude du biais est égale à 0,1. Les résultats sont éloquentes. Deux événements absorbent la quasi totalité de la masse de probabilité : "la gauche fait entre 40 et 50% des voix et n'obtient aucun siège" et symétriquement "la droite fait entre 40 et 50% des voix et n'obtient aucun siège". Ici l'indice  $I_1$  est égal à 0 mais l'indice  $I_2$  est très élevé puisque l'on obtient :  $I_2 = 0,4127$ .

TABLE 11 – L'impact d'une covariance modérée :  $\mu_k = 0$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 0,3$ ,

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0560	0,0770	0,0492	0,0140	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0025	0,0518	0,1130	0,0957	0,0345	0,0032	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0027	0,0341	0,0976	0,1143	0,0531	0,0024	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0141	0,0473	0,0769	0,0573

TABLE 12 – L’impact d’une covariance parfaite :  $\mu_k = 0$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 1$ ,

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,1893	0,0995	0,0785	0,0680	0,0639	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[4]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[4]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0660	0,0690	0,0775	0,0999	0,1885

TABLE 13 – L’impact de biais :  $\mu = (0, 0.1, -0.1)$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0004	0,0534	0,4068	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0398	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0399	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4073	0,0521	0,0003	0,0000	0,0000

Lorsque la corrélation reste parfaite mais que le biais s’amplifie en passant de 0,1 à 1, nous obtenons les résultats décrits par la Table 14.  $I_1$  est toujours égal à 0 mais la dispersion de la probabilité est différente et l’on obtient  $I_2 = 0,2122$ .

Nous passons maintenant à un cas où deux cantons sont pivots, le dernier est acquis à la gauche et la corrélation est parfaite. Des estimations de la Table 15 on déduit que  $I_1 = 0,1302$  et  $I_2 = 0,3089$ . La particularité de cet exemple vient de la disparition des cas pour lesquels la gauche obtient uniquement deux sièges ! La combinaison du biais sur un canton et de covariances fortes fait disparaître ce cas intermédiaire.

Nous terminons cette section liminaire en examinant les effets du “malapportionnement” sur les deux indices. Bien que chaque canton n’élise qu’un seul représentant, leurs populations peuvent varier fortement. Dans ces tableaux, nous supposons l’absence de biais, l’absence de covariances et une variance identique égale à 1 dans tous les cantons. Dans le cas où le premier canton est dix fois plus peuplé que les deux autres on obtient les résultats reporté Table 16 d’où l’on déduit  $I_1 = 0,23$  et  $I_2 = 0,2207$ . Dans le cas où le premier canton est cent fois plus peuplé que les deux autres, on obtiendrait cette fois  $I_1 = 0,2468$  et  $I_2 = 0,2196$ .

On peut bien entendu envisager des situations hybrides comme par exemple un canton urbain cent fois plus peuplé et très biaisé à gauche tout en laissant inchangé les autres paramètres, comme le cas présenté Table 17. On obtient  $I_1 = 0,2446$  et  $I_2 = 0,296$ . Ici toute la masse de probabilité est concentrée sur les deux dernières colonnes.

TABLE 14 – L’impact de biais :  $\mu = (0, 1, -1)$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0003	0,0506	0,1073	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3419	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3415	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1086	0,0496	0,0003	0,0000	0,0000

TABLE 15 – L’impact de biais :  $\mu = (0, 0, 1)$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0001	0,0246	0,1337	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2106	0,1302	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4028	0,0969	0,0011	0,0000	0,0000

TABLE 16 – L’impact du malapportionnement sur la relation Voix/Sièges.  $n_1 = 10, n_2 = n_3 = 1$ .

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0112	0,1164	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0125	0,2465	0,1092	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0043	0,1130	0,2437	0,0127	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1178	0,0092	0,0000	0,0000	0,0000

La gauche a un district acquis avec une très grande marge voisine de l’unanimité ; précisément il y a 79 chances sur 100 que la gauche fasse un score supérieur à 90% et 20 chances sur 100 pour que la gauche fasse un score supérieur à 80% . Donc son score départemental est au moins de 88%! Si deux districts sont acquis à la gauche et que le problème de malapportionnement est maintenu dans le rapport de 100 s’agissant du district 1, alors la masse se concentre d’avantage encore sur la dernière colonne et l’on obtient  $I_1 = 0$  et  $I_2 = 0,1654$  (table omise).

Si le problème de malapportionnement est plus équilibré, disons que le premier canton est deux fois plus peuplé que les deux autres qui eux sont de taille identique, disons (52,24,24) et que les biais disparaissent, la masse se place au centre comme indiqué Table 18 avec  $I_1 = 0,1806$  et  $I_2 = 0,2166$ .

#### 5.4 Un cas d’école : le passage de 10 districts de magnitude 1 à 5 districts de magnitude 2

Dans la section précédente, nous avons montré comment calculer  $I_1$  et  $I_2$  dans le cas d’un découpage fixe du département en  $K$  cantons de magnitude 1 et de la formule électorale la plus simple : dans chaque canton, le siège à pourvoir va au vainqueur majoritaire. L’objectif était d’étudier la sensibilité de ces deux indices aux différents paramètres du modèle de Merrill dont l’interprétation avait été donnée avant : nombre de cantons pivots, paramétrage marginal en IC ( $\sigma$  petit) ou IAC\* ( $\sigma$  intermédiaire) ou extrémiste ( $\sigma$  grand) et covariances globales et locales petites ou pas. Nous avons conduit l’exercice pour  $K = 3$  mais il peut être répété pour n’importe quelle

TABLE 17 – L’impact du malapportionnement et des biais.  $\mu = (1, 0, 0)$ ?,  $n_1 = 100, n_2 = n_3 = 1$ .

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0515	0,1931
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1013	0,4027
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0501	0,2013

TABLE 18 – La relation Voix/Sièges pour  $\mu_k = 0$ ,  $n_1 = 52$ ,  $n_2 = n_3 = 24$ ,  $\sigma = 10$ .

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0034	0,1198	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0009	0,2828	0,0899	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0907	0,2866	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1217	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000

valeur de  $K$ .

Dans ce paragraphe nous souhaitons faire la même chose avec une difficulté supplémentaire. Pour chaque jeu de paramètres de Merrill, nous souhaitons déterminer la loi conjointe voix sièges pour quatre fomules électorales : 10 cantons de magnitude 1 et formule électorale classique, 5 districts de magnitude 2 avec les deux sièges alloués au parti majoritaire ( $\underline{M}_1$ , chaque parti présentant un ticket HF), 5 districts de magnitude 2 avec les deux sièges alloués à la proportionnelle au plus fort reste ( $\underline{M}_2$ ) et enfin 5 districts de magnitude 2 avec les deux sièges alloués à la proportionnelle à la plus forte moyenne ( $\underline{M}_3$ ). Le calcul approximatif de cette loi est réalisé à l'aide d'une fonctionnalité plus sophistiquée du simulateur VLB qui implique de coder le redécoupage électoral : par défaut, le premier canton fusionne avec le deuxième, le troisième avec le quatrième, etc. Ayant calculé la loi conjointe pour les quatre configurations considérées, il devient ensuite facile d'en déduire les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$ .

Nous pourrions ainsi évaluer les conséquences sur  $I_1$  et  $I_2$  de la réforme électorale et ce qu'eurent été les conséquences sur  $I_1$  et  $I_2$  des deux réformes électorales alternatives qui auraient pu être envisagées en lieu et place du scrutin binominal finalement retenu. Nous conduisons l'anayse dans le cas du passage de 10 à 5 mais la même méthode pourrait être retenue pour n'importe quelle autre valeur de  $K$ .

## Scenario A

On commence par une situation très symétrique : tous les cantons sont pivots, pas de malappportionement, pas de covariance et une variance un peu plus élevée que IAC\*. On regroupe les cantons deux par deux. La situation avant réforme (formule  $\underline{M}_0$ ) est présentée Table 19. Si on laisse de côté le cas du tie, on obtient que  $\tilde{I}_1$  vaut  $0,0377 + 0,0036 + 0,0002 + 0,0344 + 0,0033 + 0,0002 = 0,0794$ . Le calcul de  $I_2$  donne une estimation proche de 10% (0,0995). La probabilité d'un tie vaut  $0,1246 + 0,1230 + 0,0003 = 0,2479$

Avec le passage à cinq districts (formule  $\underline{M}_1$ ), on obtient la loi conjointe présenté dans la Table 20. La probabilité d'un tie est désormais égale à 0. La probabilité de  $\tilde{I}_1$  vaut  $0,0786 + 0,0040 + 0,0782 + 0,0031 = 0,1682$ . Elle a doublé. La proportionalité quant à elle a se détériore puisque l'on obtient  $I_2 = 0,1375$ .

Dans le cas où l'allocation s'effectue à la proportionnelle à la plus forte moyenne (formule  $\underline{M}_2$ ), on obtient la loi conjointe de la Table 21. La probabilité d'un tie  $0,0010 + 0,1446 + 0,1406 + 0,0010 = 0,2872$  est désormais très élevée. Il ne faut pas trop s'attarder sur ce point. Comme nous l'avons déjà souligné, à maintes reprises ceci est un artifact de la magnitude de 2 qui donne un intervalle de représentation très élevé. On pourrait songer à élever le seuil de représentativité de 33% à 45% par exemple et refaire les calculs. La valeur de  $\tilde{I}_1$  après exclusion des ties

TABLE 19 – La loi conjointe Voix/Sièges pour 10 Cantons,  $\sigma = 6$ 

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0062	0,0028	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0121	0,0312	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0101	0,1067	0,0033	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[4]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,1679	0,0344	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[5]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1246	0,1230	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
[6]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0377	0,1628	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000
[7]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0036	0,1030	0,0106	0,0000	0,0000	0,0000
[8]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0292	0,0151	0,0000	0,0000	0,0000
[9]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0024	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000
[10]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000

TABLE 20 – La loi conjointe Voix/Sièges pour 5 Cantons après fusion,  $\sigma = 6$ 

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0032	0,0237	0,0049	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0009	0,0552	0,0993	0,0031	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[4]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0179	0,2179	0,0782	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
[6]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0786	0,2068	0,0169	0,0000	0,0000	0,0000
[8]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0040	0,0967	0,0601	0,0010	0,0000	0,0000
[10]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0040	0,0238	0,0033	0,0000	0,0000

vaut  $0,0175 + 0,0003 + 0,0207 = 0,0385$ . Celle de  $I_2$  vaut  $0,0718$ .

Dans le cas de la proportionnelle au plus fort reste (formule  $\underline{M}_3$ ), on obtient la Table 22. La probabilité d'un tie vaut maintenant  $0,0195 + 0,2229 + 0,2162 + 0,0229 = 0,4815$ . S'agissant de  $\tilde{I}_1$ , on obtient  $0,0297 + 0,0001 + 0,0282 + 0,0003 = 0,0583$ . La valeur de  $I_2$  est quant à elle de  $0,0635$ . La Table 23 résume les valeurs des indices obtenues dans pour différentes règles de vote.

### Scénario B

On considère maintenant une paramétrisation de Merrill similaire à celle considérée ci-dessus à l'exception du fait que le nombre de cantons pivots passe de 10 à 6 : deux premiers sont acquis à la gauche et deux suivants à la droite (les moyennes considérées sont respectivement 1 et -1). Après la fusion, il reste un canton biaisé à gauche et un canton biaisé à droite. Dans la suite de cette sous-section, les tables associées aux lois conjointes ne seront pas données. Les résultats de nos calculs sont résumés Table 24 (situations de ties négligées).

### Scénario C

On passe maintenant à une situation avec de la covariance : les variances sont supposées égales à 40 et la covariance est globale/commune et vaut 10 (donc coefficient de corrélation intercommunal de 0,25). Il n'y a pas de cantons pivots inclus. Les résultats sont donnés Table 25.



TABLE 21 – La loi conjointe pour 5 Cantons après fusion, plus fort reste,  $\sigma = 6$

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0018	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0018	0,0246	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0003	0,0490	0,0516	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[4]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0198	0,1885	0,0207	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[5]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,1446	0,1406	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
[6]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0175	0,1734	0,0214	0,0000	0,0000	0,0000
[7]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0521	0,0504	0,0002	0,0000	0,0000
[8]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0262	0,0025	0,0000	0,0000
[9]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0014	0,0000	0,0000
[10]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0001	0,0000

TABLE 22 – La loi conjointe pour 5 Cantons après fusion, plus forte moyenne,  $\sigma = 6$

	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
[0]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[1]	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[2]	0,0000	0,0000	0,0012	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[3]	0,0000	0,0000	0,0019	0,0222	0,0131	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
[4]	0,0000	0,0000	0,0007	0,0522	0,1389	0,0282	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
[5]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0195	0,2229	0,2162	0,0229	0,0000	0,0000	0,0000
[6]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0297	0,1318	0,0508	0,0004	0,0000	0,0000
[7]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0123	0,0246	0,0023	0,0000	0,0000
[8]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0025	0,0015	0,0001	0,0000
[9]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000
[10]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

TABLE 23 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0.0758	0.1639	0.0385	0.0583
$I_2$	0.0995	0.1375	0.0718	0.0635

TABLE 24 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$ , avec 4 cantons polarisées

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,0826	0,1747	0,0385	0,0573
$I_2$	0,0982	0,1330	0,0712	0,0632

TABLE 25 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$ , avec 10 cantons polarisées et  $\rho = 0,5$

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,0322	0,0956	0,0164	0,0262
$I_2$	0,0967	0,1225	0,0794	0,0647

TABLE 26 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$ , avec 10 cantons polarisées et  $\rho = 0,5$

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,0281	0,0756	0,0164	0,0240
$I_2$	0,1376	0,1647	0,0931	0,0668

TABLE 27 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$ , en présence de malapportionnement.

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,1616	0,2262	0,1140	0,1011
$I_2$	0,1056	0,1404	0,0800	0,0715

### Scénario D

La Table 26 présente les résultats sous des conditions identiques au scénario C avec désormais une variance de 20 et une covariance de 10 donc un coefficient de corrélation de 0,5.

### Scenario E

Cette fois on suppose la nullité des covariances, pas de cantons pivots, une variance uniforme égale à 10 mais un problème de malapportionnement. A titre d'exemple, on suppose que tous les cantons originaux sont équilibreux à l'exception de deux d'entre eux (cantons urbains) : le premier qui est trois fois plus peuplé et le dernier qui est 5 fois plus peuplé. Lorsqu'on passera à 5 cantons, on supposera alors que le premier fusionne avec le second, le troisième avec le quatrième, etc.. pour donner une répartition (4, 2, 2, 2, 6) des populations dans les nouveaux cantons. Les résultats pour les différentes règles de vote sont donnés par la Table 28.

### Scenario F

Malapportionnement partiellement corrigé. On reprend la situation paramétrique précédente mais avec un redécoupage en cinq districts qui corrige partiellement (pas parfaitement) le malapportionnement de départ. Les cantons 1 et 10 restent tels quels. Les autres cantons sont regroupés par 2 ou 3. Le vecteur final des populations est (3, 3, 3, 2, 5). On remarquera que cette façon de faire modifie le comportement électoral des superdistricts. Si le résultats dans le nouveau canton 1 est issu d'une seul tirage, celui du nouveau canton 2 est obtenu à partir de trois tirages aléatoires indépendants dans les cantons initiaux. On obtient le Tableau 29.

TABLE 28 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$ , malapportionnement corrigé partiellement.

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0.1639	0.2450	0.1334	0.1139
$I_2$	0.1061	0.1478	0.0852	0.0773

TABLE 29 – Les valeurs des indices, passage de  $K = 10$  à  $K = 5$ , malapportionnement corrigé partiellement.

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,0943	0,1832	0	0
$I_2$	0,1077	0,1564	0,05	0,05

TABLE 30 – Démographie cantonale de l'Ariège avant redécoupage

Anciens Cantons	Population (2013)	Anciens Cantons	Population (2013)
1. Ax-Les-Thermes	3014	12. Pamiers-ouest	11035
2. La Bastide-de-Sérou	2147	13. Querigut	528
3. Les Cabannes	2593	14. Sainte-Croix-Volvestre	2092
4. Castillon	2969	15. Saint-Girons	10437
5. Foix-Ville	9885	16. Saint-Lizier	7389
6. Le Fossat	6530	17. Saverdunt	11412
7. Lavelanet	12854	18. Tarascon	8912
8. Le Mas d'Azil	4204	19. Varilhes	10285
9. Massat	1891	20. Vicdessos	1419
10. Mirepoix	13285	21. Foix-rural	11068
11. Oust	3056	22. Pamiers-est	15032

## Scenario G

On termine par un cas proche de l'hypothèse IC pure : tous les districts sont pivots, pas de malapportionnement, pas de covariance mais une variance très basse égale à  $\frac{1}{100}$ . Les résultats sont consignés dans la Table 29. On notera qu'avec un pas de 10 pour la distribution des voix, la valeur minimale de  $I_2$  est de 0.05 (valeur obtenue ici pour les formules 2 et 3).

## 5.5 Le cas de l'Ariège

Nous terminons cette introduction aux calculs des indices  $I_1$  et  $I_2$  par l'étude liminaire d'un cas concret, celui du département de l'Ariège. Commençons par motiver le choix de ce territoire. Ce département est peu peuplé et principalement rural : les deux principales villes (Foix et Pamiers) ne dépassent pas respectivement 10000 et 15000 habitants. Comme dans tous les autres départements, le problème du malapportionnement était bien présent mais ne présentait pas la sévérité qu'on lui connaît dans d'autres départements. Avant la réforme du mode de scrutin et le redécoupage qui l'accompagne, l'Ariège comptait 22 cantons. La Table 30 résume le problème du malapportionnement et se base sur les dernières données démographiques disponibles (2013).

On voit que le problème du malapportionnement était bien présent dans ce département. Par exemple, le ratio entre le canton 6 et le canton 2 vaut  $\frac{11126}{2172} \simeq 5.13$ . Le nouveau découpage prévoit 13 cantons, dont les données démographiques sont présentées Table 31. L'écart du plus gros au plus petit vaut désormais 2.06<sup>27</sup>. Le problème de malapportionnement n'as pas disparu mais a été amoindri... La Figure 13 nous donne quant à elle la carte des

27. En principe, la loi ne tolère que des écarts de 20% à la moyenne, soit un écart maximal de  $\frac{1,2}{0,8} = 1,5$ . Cependant des exceptions peuvent être faites en fonction de contraintes géographiques fortes, ce qui est le cas pour le nouveau canton de Haute Ariège.

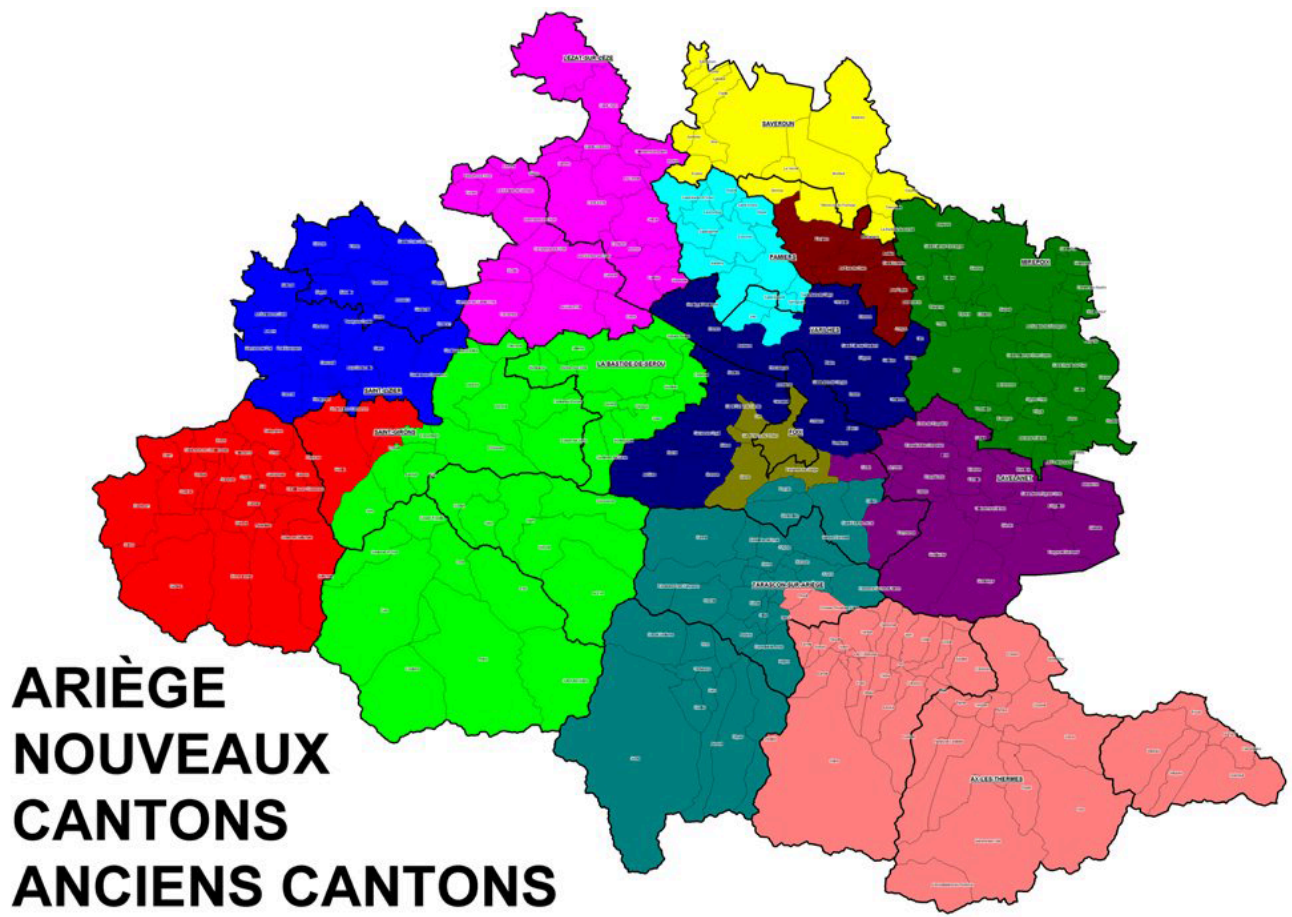


FIGURE 13 – Les anciens et nouveaux cantons de l’Ariège. *Source : site de la préfecture de l’Ariège.*

TABLE 31 – La Nouvelle Démographie Cantonale de l’Ariège

Nouveaux Cantons	Population (2013)
1. Haute-Ariège	6717
2. Arize-Lèze	10734
3. Couserans est	9618
4. Couserans ouest	10882
5. Foix	13838
6. Mirepoix	13285
7. Pamiers 1	12465
8. Pamiers 2	13641
9. Pays d’Olmes	13155
10. Portes d’Ariège	12803
11. Portes du Couserans	9481
12. Sabarthès	11846
13. Val d’Ariège	13573

nouveaux des cantons superposée aux frontières des anciens.

Outre la faible valeur de  $K$  ( $K = 22$ ), le choix de l’Ariège présente l’avantage suivant. Dans la double opération consistant d’une part à résoudre le problème de malapportionnement et d’autre part à diviser en gros par 2 le nombre de cantons, il se peut que des communes qui étaient ensemble avant ne le soient plus ensuite. S’agissant des cantons urbains, le phénomène n’est pas à écarter non plus, même si les zones urbaines sont relativement stables entre elles car l’équilibre démographique urbain/périurbain peut lui avoir connu des modifications importantes.

Ce point d’apparence mineure pose un problème pratique ici car les unités de base dans notre simulateur VLB sont les cantons de départ et qu’ensuite la commande suppose que les cantons se regroupent par 2, 3 ou plus pour former des supercantons. Ceci suppose implicitement que les communes restent apparées. Si ce n’est pas pas le cas (ce n’est jamais le cas), il y a deux réactions possibles. Prendre comme unité de base la commune au lieu du canton. Ceci pose un gros problème calculatoire car pour l’Ariège  $K$  passerait de la valeur 22 à la valeur 332! L’autre réaction suivie ici consiste à rechercher une partition plus fine que celle des cantons qui permette après regroupement intelligent de retrouver la nouvelle structure cantonale en appliquant deux fois de suite le simulateur VLB (une première fois sur l’assignement des nouvelles unités aux cantons et une seconde fois aux super cantons). Nous avons choisi d’appeler “terroirs” ces nouvelles unités parfois un peu plus petites que les cantons. Dans le cas de l’Ariège, la plus grosse partition qui remplit les conditions requises correspond à une valeur de  $K$  égale à 29. En effet, l’ancien canton 15 (Saint-Girons) a été affecté en partie au nouveau canton 3 et au nouveau canton 4, l’ancien canton 18 aux nouveaux cantons 1 et 12, l’ancien canton 19 aux nouveaux cantons 7 et 13, l’ancien canton 21 aux nouveaux cantons 5, 9, 12 et 13, et l’ancien canton 22 aux nouveaux cantons 8 et 10. La partition à considérer ne dépasse donc que de 7 unités le nombre d’anciens cantons.

La Table 32 liste les 29 terroirs, leur population et précise leur rattachement aux supercantons (nouveaux cantons). La 2<sup>ème</sup> colonne fait référence aux anciens cantons et la dernière aux nouveaux cantons.

En utilisant les poids (populations) indiqués pour chaque terroir, nous avons pu calculer nos indices  $I_1$  et  $I_2$  avec

TABLE 32 – Le Découpage de l'Ariège en 23 Terroirs

Numéro terroir	Ancien canton	Population	Rattachement
1	canton 1	3014	canton 1
2	canton 2	2147	canton 3
3	canton 3	2593	canton 1
4	canton 4	2969	canton 4
5	canton 5	9885	canton 5
6	canton 6	6530	canton 2
7	canton 7	12854	canton 9
8	canton 8	4204	canton 2
9	canton 9	1891	canton 3
10	canton 10	13285	canton 6
11	canton 11	3056	canton 3
12	canton 12	11035	canton 7
13	canton 13	528	canton 1
14	canton 14	2092	canton 11
15	partie du canton 15	2524	canton 3
16	partie du canton 15	7913	canton 4
17	canton 16	7389	canton 11
18	canton 17	11412	canton 10
19	partie du canton 18	582	canton 1
20	partie du canton 18	8330	canton 12
21	partie du canton 19	1430	canton 7
22	partie du canton 19	8855	canton 13
23	canton 20	1419	canton 12
24	partie du canton 21	3952	canton 5
25	partie du canton 21	301	canton 9
26	partie du canton 21	2097	canton 12
27	partie du canton 21	4718	canton 13
28	partie du canton 22	13641	canton 8
29	partie du canton 22	1391	canton 10

TABLE 33 – Un Estimation des Indices pour l’Ariège ( $\sigma_k = 1, \mu_k = 0$ )

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,1905	0,2399	0,0160	0,0001
$I_2$	0,0683	0,1590	0,0254	0,0254

TABLE 34 – Un Estimation des Indices pour l’Ariège, avec Biais ( $\sigma_k = 10, \rho = 0$ )

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,0886	0,1548	0,0881	0,1037
$I_2$	0,0810	0,0954	0,0556	0,0447

différents jeux de paramètres. Nous avons d’abord considéré le cas où les terroirs sont tous politiquement équilibrés (absence de biais), avec une variance unitaire et absence de covariance. Les résultats sont consignés Table 33. Comme dans la sous-section précédente, la formule 0 renvoie à l’ancien système électoral, la formule 1 au nouveau et les formules 2 et 3 aux alternatives proportionnelles que nous avons envisagées. Le nouveau système électoral induit donc une forte détérioration de l’indice de disproportionnalité. En cela, on retrouve les conclusions du cabinet Liegey Muller Pons qui ont évoqué dans *Le Monde* du 1<sup>er</sup> Mars 2015. L’indice de dismajorité se dégrade quant à lui dans une moindre mesure. On aurait pu penser que la réduction des inégalités entre populations des nouveaux cantons aurait fait chuter  $I_1$ . Mais il faut noter ici qu’en faisant un tirage indépendant au niveau de chaque terroir, et en les combinant pour obtenir les résultats dans les nouveaux supercantons, on augmente la compétitivité de chaque élection : il est plus difficile d’obtenir alors un score élevé dans les terroirs constitutifs du nouveau canton. La hausse de l’indice  $I_1$  pourrait être le reflet de ce phénomène, dès lors que les évolutions des terroirs ne sont pas corrélées dans nos simulations.

Nous avons ensuite supposé que 22 “terroirs” étaient plutôt acquis à la gauche, 4 plutôt acquis à la droite et 3 ouverts ; que la variance était égale à 10 et qu’il n’y avait pas de covariance. La Table 34 reprend les résultats obtenus. La simulation suivante (Table 35) est identique à la précédente, avec une variance beaucoup plus élevée (égale à 36). Il ressort de ces tableaux que, dans les deux scénarios considérés, la réforme (passage de la formule 0 à la formule 1) s’accompagne aussi d’un accroissement de la dismajorité et (dans une moindre mesure) de la disproportionnalité.

Il est cependant difficile d’isoler l’impact de la réforme proprement dite (division par deux du nombre de districts et adoption d’une *district magnitude* de 2) car les valeurs obtenues pour la formule 1 dans nos tableaux intègrent à la fois les effets de la réforme et ceux de la correction du problème de *malapportionment*. Pour tenter de

TABLE 35 – Un Estimation des Indices pour l’Ariège, avec Biais ( $\sigma_k = 36, \rho = 0$ )

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$\tilde{I}_1$	0,1524	0,2078	0,1168	0,1148
$I_2$	0,0664	0,0785	0,0558	0,0512

TABLE 36 – Une Estimation des Indices pour l’Ariège, Contrefactuelle Sans Malapportionnement

	Formule 0	Formule 1	Formule 2	Formule 3
$I_1$	0,1346	0,2262	0,0154	0,0000
$I_2$	0,0664	0,0915	0,0485	0,0500

neutraliser l’effet de cette correction du *malapportionnement*, nous avons fait de nouvelles simulations en considérant un regroupement de nos 29 terroirs en 22 cantons supposés équilibreux, puis en 13 (super)cantons eux-aussi équilibreux. Nous obtenons, pour ce premier scénario (absence de biais politique, variance unitaire et absence de covariance) les résultats consignés Table 36. Ces résultats suggèrent que la détérioration des indices  $I_1$  et  $I_2$  résulte dans une large mesure de la réforme proprement dite.

Comme nous l’avons répété à maintes reprises, faute d’une estimation économétrique poussée, il est difficile de dire quelles sont les valeurs des paramètres de Merrill les plus adaptées à la situation de l’Ariège. Clairement l’Ariège est un département qui vote à gauche dans toutes les élections et en particulier dans les élections cantonales. Voici quelques informations succinctes. Le conseil général sortant comprend 19 élus de gauche et 3 élus de droite. En nous basant sur le dernier renouvellement (2011) où étaient à pourvoir 11 sièges, on constate une certaine diversité, même en ignorant les duels gauche-gauche qui demanderaient un traitement à part. Dans le canton de Lavelanet gagné par la gauche, le score du vainqueur était de 51.24%. Dans le canton de Mas-d’Azil gagné lui aussi par la gauche, le score était lui écrasant, avec 72%. Cette situation de marge écrasante est très fréquente lorsque la gauche gagne. Par contre, elle l’est beaucoup moins dans les quelques cantons gagnés par la droite. Par exemple, dans le canton de Sainte-Croix-Volvestre gagné par la droite, le score est modeste, 52%, mais acquis au premier tour. En 2008 la droite avait gagné les cantons de Saverdun et Massat avec des marges modérées. Saverdun est un canton intéressant : la droite et la gauche alternent, ainsi que le canton de Massat. Par contre les cantons de Foix-Ville et d’Ax-Les-Thermes n’ont jamais connu l’alternance. On doute qu’ils soient pivots mais seule une étude économétrique poussée pourrait nous renseigner sur le nombre de cantons de cette nature, ainsi que sur la variance et la covariance décrivant au mieux ce département. Dans une étape ultérieure de nos recherches, le site du Ministère de l’intérieur (<http://www.interieur.gouv.fr/Elections/Les-resultats>) qui contient de nombreuses informations utiles, nous permettra de calibrer le simulateur VLB sur des données électorales.

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons introduit un cadre analytique et statistique destiné à évaluer la récente réforme du mode d’élection des conseillers généraux/départementaux selon plusieurs critères. Le travail d’ingénierie électorale réalisé ici s’est appuyé sur quatre principes/indices mais seuls les deux premiers ont fait l’objet d’une investigation poussée. La réforme était principalement motivée et défendue par ses promoteurs par le désir d’en finir avec la sous-représentation criante des femmes dans les conseils généraux. Les questions soulevées dans notre article peuvent être formulées comme suit : en procédant comme il l’a fait, le législateur n’a-t-il pas perdu d’un côté ce qu’il a gagné



de l'autre? Si oui, peut-on quantifier les tradeoffs et peut-on concevoir des mécanismes alternatifs qui domineraient le cas échéant le mécanisme retenu?

Il nous semble, à la vue des études et simulations que nous avons proposées, que la réponse à la première question est assez claire quant à l'indice  $I_2$ . La réduction du nombre de cantons par deux, associé à une magnitude 2, se traduit par une hausse de la disproportionnalité. C'est le principal prix à payer de l'exigence de parité telle que l'a conçue le législateur. L'impact de cette réforme sur l'indice  $I_1$  est plus ambigu, au sens où l'interprétation de nos résultats est perturbé par l'existence d'un nombre de pair de cantons (et donc des possibilités de ties) dans certains départements avant la réforme.

Notre étude est cependant loin d'épuiser les possibilités de réformes alternatives. Pour une *district magnitude* fixée à deux et un nombre de cantons réduit de moitié, nous avons déjà fait allusion à un mécanisme où il aurait pu être procédé à un double vote. On aurait pu aussi imaginer l'utilisation de la proportionnelle (avec des listes comportant une femme et un homme) au plus fort reste ou à la plus forte moyenne et tirage au sort du siège dans le cas où un unique siège est alloué à la liste. On aurait pu même envisager (comme en Finlande) la possibilité d'un vote préférentiel, chaque électeur indiquant sur la liste qu'il retient à qui il souhaite donner son vote en priorité. Il est vrai que, mathématiquement, rien n'empêche dans le cas d'un vote préférentiel une déviation de la norme paritaire si les électeurs sont machistes ou féministes.

On peut aussi s'interroger sur le bien fondé d'une *district magnitude* égale à 2. Dans le projet de loi, plusieurs solutions alternatives à celle proposée ont été évoquées. Parmi elles, on retiendra celle qui suggérait de retenir comme circonscription électorale l'arrondissement. Dans le cas d'un département composé de quatre arrondissements, cela revient à retenir une *district magnitude* de 10 à 12. La proportionnelle à la plus forte moyenne avec ou sans bonus pourrait alors être utilisée pour l'allocation des sièges. Une telle solution aurait permis d'atténuer le "gerrymandering" auquel le recoupage a inévitablement donné lieu. Par ailleurs, les indices  $I_1$  et  $I_2$  auraient vu leur valeur diminuer par rapport à la situation de départ mais aussi par rapport au mode de scrutin binominal paritaire. On peut aussi imaginer qu'avec une telle *district magnitude* et une obligation de parité sur les listes, l'indice  $I_3$  aurait vu sa valeur chuter par rapport à la situation actuelle sans pour autant atteindre la valeur idéale de 0. Il est en effet vraisemblable que plus la *district magnitude* est grande, plus l'indice  $I_3$  est faible! Reste bien entendu la question de l'indice  $I_4$ . Si l'on en croit les promoteurs du système binominal paritaire, des systèmes plus proportionnels auraient conduit à une perte d'ancrage territorial et à un accroissement significatif de la valeur de  $I_4$ . Rien n'est moins certain si l'on se réfère aux travaux de Carey et Hix déjà cités.

Dans cet article, nous avons supposé que la compétition électorale se déroulait entre deux partis politiques homogènes. Même si la division droite/gauche reste un élément majeur de lecture, force est de reconnaître que la situation politique courante invite à une révision de ce cadre de travail. Le principal parti de gauche (le parti socialiste) qui avait déjà connu une sécession avec la création du Parti de gauche (son l'allié le plus fréquent est le parti communiste) voit son homogénéité se fissurer et son principal allié Europe Ecologie Les Verts faire cavalier seul ou se tourner vers des alliances avec le Front de gauche (l'Isère demeurant de ce point de vue le département vitrine de ce nouveau décor). Le principal parti républicain de droite a perdu une partie de ses alliés centristes. Il

avait déjà perdu une partie de ceux-ci avec la création du Modem. La création de l'UDI accentue ce phénomène même si du point de vue des alliances, peu de surprises sont à prévoir. La grande nouveauté est bien sur la montée spectaculaire du Front de National avec lequel toute tentation d'alliance à droite a été pour le moment bannie.

Dans un contexte multipartiste, il faudrait aussi comprendre ce que vont faire les électeurs pour chaque système électoral envisagé ; par exemple : vont-ils voter sincèrement, vont-ils voter stratégiquement ? Cette question n'est pas une mince affaire en soi mais même lorsqu'elle est réglée, se pose également la question de ce que la presse a appelé, non sans malice, le "troisième tour". Dans le cas d'une simple opposition droite-gauche, cette question ne se pose pas sauf dans la cas d'une égalité parfaite, question discutée amplement dans l'appendice 3 . En revanche, lorsqu'au sortir du second tour, aucun parti ayant obtenu des conseillers départementaux ne possède à lui tout seul la majorité absolue, se pose la question des alliances et de la formation d'un exécutif départemental coalitionnel. Ceci soulève alors la question de la gouvernabilité qui a fait l'objet d'une abondante littérature en ingénierie électorale. De nombreux indices de gouvernabilité ont été proposés : ils ont en commun de tous dépendre du total relatif des sièges contrôlés par la coalition qui gouverne, du nombre de partis dans cette coalition et du nombre de partis qui dans un système purement proportionnel pourraient participer au jeu coalitionnel. L'indice le plus populaire d'un système électoral (souvent noté  $G_2$ ) consiste à diviser le total relatif des sièges contrôlés par la coalition par le nombre de partis dans la coalition. Si un parti a la majorité à lui tout seul cet indice est borné inférieurement à 0,5. En revanche si par exemple, deux partis contrôlant chacun 30% des sièges forment un exécutif départemental de coalition alors l'indice tombe à la valeur 0,3. Sachant que les systèmes proportionnels tendent à encourager la formation de plus de partis ou factions, il est probable que le numérateur des indices ci-dessus soit plus élevé et que l'indice de gouvernabilité devienne plus petit. Migheli et Ortona (2010) ont proposé une version plus sophistiquée d'un tel indice qu'ils notent  $G_3$  qui fait intervenir le degré de fragmentation des principaux partis et le calcule dans le cas des parlements allemand, italien et néerlandais. Il serait utile de calculer les indices  $G_2$  et  $G_3$  des "parlements" départementaux (ou de proposer un cinquième indice<sup>28</sup> de gouvernabilité, (disons  $I_5$  pour conserver les notations de notre article) et de calculer la valeur ex ante de cet indice pour les différentes formules électorales qui ont été discutés. Encore une fois, répétons que ce travail pratique suppose néanmoins qu'au préalable aient été posées les bases du comportement des électeurs dans ce contexte multipartis et du jeu de formation d'un exécutif départemental.

Si cet article s'est concentré sur le scrutin binominal paritaire, cette réforme est loin d'épuiser l'actualité électorale française. Les mêmes outils que ceux utilisés dans cet article, permettent de jeter un regard rétrospectif sur le travail conduit par le "Comité Balladur" et la proposition de réforme (abrogée par la gauche depuis son accession au pouvoir en 2012) visant à fusionner les conseils généraux et régionaux en *conseils territoriaux*. Cette proposition, visant à attaquer le millefeuille administratif, fut l'objet de travaux et débats parlementaires animés où les propositions de modes de scrutin se succédèrent les unes aux autres. Un rapport d'une qualité exceptionnelle, le rapport N° 509, porté par les sénateurs Maurey et Collombat, offre une synthèse de ce travail qui constitue une base préalable au calcul de nos indices.

---

28. Un autre indice de gouvernabilité intéressant est l'indice  $IS$  proposé par Di Cortona et alli (1999).

Une deuxième réforme, pour l'heure renvoyée aux calendes grecques, a ses racines dans l'une des promesses de campagne de l'actuel locataire de l'Elysée : l'introduction d'une *dose de proportionnelle* dans l'élection des députés. Il n'est pas clair comment conduire une telle réforme sachant que l'effectif de la chambre est maintenu constant. Il faut d'abord s'entendre sur le pourcentage de députés élus à la proportionnelle. Ensuite, il faut s'accorder sur leur mode d'élection. Comment le double vote sera-t-il organisé en pratique ? Doit-on par exemple envisager une élection dans le cadre d'une grande circonscription nationale ? Le découplage sera-t-il autorisé comme en Allemagne ou non ? Un bel exemple d'ingénierie électorale au service de l'analyse d'une possible réforme de ce type dans le contexte québécois est offert par le travail de Blais et Massicotte (2003) et dans le contexte anglais par Hix, Johnston et McLean (2010).

Dans la même lignée, cet article avait pour but de proposer une feuille de route pour l'analyse de plusieurs aspects des réformes électorales. Nous planifions d'étendre notre approche d'ingénierie électorale à une classe de systèmes électoraux plus riches, où à la fois la *district magnitude* et la formule électorale sont sous le contrôle de l'ingénieur. Nous pensons aussi le faire dans un contexte où les préférences et choix ne seraient plus uniquement pilotés par l'identification partisane.

## 7 Appendices

### 7.1 Appendice 1 : Deux Modèles IAC

On considère une population divisée en  $K$  districts équilibreés. On notera  $m$  la population de chaque district. Dans le corps du texte nous avons évoqué deux modèles stochastiques notés respectivement  $IAC^*$  et  $IAC^{**}$

$IAC^*$  correspond à l'application du modèle IAC au sein de chaque district et à l'indépendance entre les districts.

$IAC^{**}$  correspond à l'application du modèle IAC au sein de chaque superdistrict et à l'indépendance entre les superdistricts.

Dans le cas de  $IAC^*$ , en divisant par 2 le nombre de districts (on passe des districts aux superdistricts) on a, à l'échelle de chaque superdistrict, un modèle similaire à celui étudié par Le Breton, Lepelley et Smaoui (2014) : la population de chaque superdistrict est divisée en deux groupes de taille égale.

Dans le cas de  $IAC^{**}$ , en multipliant par 2 le nombre de districts (on passe des superdistricts aux districts) on obtient un modèle aléatoire qui à notre connaissance n'a jamais été étudié jusqu'à présent.

#### **IAC \***

Quelle est la loi de probabilité des votes dans le superdistrict ? Notons  $S_1$  et  $S_2$  le nombre de votes de gauche dans les deux districts composant le super-district. Quelle est la loi de  $S_1 + S_2$  ? Soit  $l \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ . On distingue deux cas :

Soit  $l \leq m$ . On a :

$$\text{Prob}(S_1 + S_2 = l) = \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} \binom{m}{l-k} \left( \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k} dp \right) \left( \int_0^1 q^{l-k} (1-q)^{m-l+k} dq \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} \binom{m}{l-k} \frac{k!(m-k)!}{(m+1)!} \frac{(l-k)!(m-l+k)!}{(m+1)!} \\
&= \frac{l+1}{[(m+1)!]^2} (m!)^2 = \frac{l+1}{(m+1)^2}
\end{aligned}$$

Soit maintenant  $l > m$  : On a maintenant :

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(S_1 + S_2 = l) &= \sum_{k=l-m}^m \binom{m}{k} \binom{m}{l-k} \left( \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k} dp \right) \left( \int_0^1 q^{l-k} (1-q)^{m-l+k} dq \right) \\
&= \frac{2m-l+1}{[(m+1)!]^2} (m!)^2 = \frac{2m-l+1}{(m+1)^2}
\end{aligned}$$

On remarque que lorsque  $m \rightarrow \infty$ , la variable aléatoire  $\frac{S_1+S_2}{2m} \in [0, 1]$  converge en loi vers la convolée de deux lois uniformes sur  $[0, 1]$  qui est la loi triangulaire dont la loi de densité  $f$  sur  $[0, 1]$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 4(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lorsque  $m$  est grand on peut ainsi effectuer, pour chacun des trois mécanismes, le calcul de la probabilité des évènements : "le super-district élit deux députés de gauche" et "le super-district élit un député de gauche et un député de droite".

Lorsque  $m$  est grand on obtient  $\frac{1}{2}$  pour le mécanisme 1 et pour les mécanismes 2 et 3 les valeurs respectives :

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 4(1-x) dx = \frac{2}{9}$$

$$\int_{\frac{3}{4}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{3}{4}}^1 4(1-x) dx = \frac{1}{8}$$

## IAC \*\*

A l'échelle du superdistrict, les calculs sont conventionnels. En revanche, le calcul des votes respectifs réalisés dans chacun des districts est moins immédiat. Considérons comme ci-dessus un superdistrict et ses deux districts notés 1 et 2. La probabilité de l'évènement  $(k, l)$  (la gauche reçoit  $k$  voix dans le district 1 et  $l$  voix dans le district 2) est égale à :

$$\binom{m}{k} \binom{m}{l} \int_0^1 p^{k+l} (1-p)^{2m-k-l} dp =$$

$$\binom{m}{k} \binom{m}{l} \frac{(k+l)!(2m-k-l)!}{(2m+1)!} = \binom{m}{k} \binom{m}{l} \frac{1}{2m+1} \binom{2m}{k+l}$$

Quelles sont les différences avec IAC \* ? On pourrait essayer de construire la table de la loi jointe ou au moins disposer de quelques valeurs. Par exemple dans le cas où  $m = 101$ , on a reporté ci-dessous quelques éléments de la table de la loi jointe :

$$\begin{bmatrix} k, l & 10 & 50 & 90 \\ 10 & 9.1429 \times 10^{-4} & 1.3245 \times 10^{-12} & 4.2152 \times 10^{-35} \\ 50 & 1.3245 \times 10^{-12} & 5.5107 \times 10^{-4} & 2.0697 \times 10^{-12} \\ 90 & 4.2152 \times 10^{-35} & 2.0697 \times 10^{-12} & 8.7755 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Le contraste avec  $IAC^*$  est frappant. Pour  $IAC^*$ , la table de contingence est uniforme (la valeur commune est  $\frac{1}{102^2} = 9.6117 \times 10^{-5}$ ) alors que pour  $IAC^{**}$ , la masse de probabilité est principalement concentrée sur et dans le voisinage de la diagonale

Pour les calculs de notre papier, nous sommes intéressés par la probabilité de l'évènement "Dans les deux districts considérés, une majorité d'électeurs votent à gauche". Dans le cas  $IAC^{**}$ , elle vaut :

$$\sum_{k=\frac{m+1}{2}}^m \sum_{l=\frac{m+1}{2}}^m \binom{m}{k} \binom{m}{l} \frac{(k+l)!(2m-k-l)!}{(2m+1)!}$$

Dans le cas où  $m = 101$ , on obtient :

$$\sum_{k=51}^{101} \sum_{l=51}^{101} \binom{101}{k} \binom{101}{l} \frac{(k+l)!(202-k-l)!}{(203)!} = 0.47217$$

qui est beaucoup plus grand que 0.25 la valeur que prend cette probabilité dans le cas de  $IAC^*$ .

## 7.2 Appendice 2 : Calcul Approché de l'indice $I_1$ pour les Mécanismes 2 et 3.

Dans ce paragraphe, nous souhaiterions mettre en valeur une formule permettant le calcul approché de l'indice  $I_1$  dans le cas des mécanismes 2 et 3 et du modèle  $IAC^*$ . Si l'on veut éviter le calcul approché, on doit comme dans le corps du texte partir des cantons (districts) et non des supercantons (superdistricts) et faire des tirages uniformes à l'échelle de ceux-ci. Le nombre de variables entières est alors multiplié par deux.

Dans la suite, on note  $M = 2m$  la taille du super-district. Pour calculer l'indice on calcule la probabilité des configurations de votes par superdistricts telles que le vote populaire est à droite mais la gauche remporte une majorité stricte de sièges . A ce stade, on ignore la cas spécial où le nombre de sièges est divisé à parts égales entre les deux camps. On commence par fixer deux entiers  $k_1$  et  $k_2$  tels que  $k_1 + 2k_2 > \frac{K}{2}$ . On notera  $n_k$  le nombre de votes de gauche dans le superdistrict  $k$ . Commençons par le mécanisme 2.

Dans ce cas, on compte le nombre de solutions  $n = (n_1, n_2, \dots, n_{\frac{K}{2}})$  du système d'inégalités suivantes :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{\frac{K}{2}} < \frac{MK}{2}$$

$$\frac{M}{4} < n_i < \frac{3M}{4} \text{ pour tout } i = 1, \dots, k_1$$

$$n_i < \frac{M}{4} \text{ pour tout } i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$$

$$n_i > \frac{3M}{4} \text{ pour tout } i = k_1 + k_2, \dots, \frac{K}{2}$$

Notons  $\Pi(k_1, k_2)$  l'ensemble des solutions entières de ces inégalités;  $\phi(k_1, k_2)$  le cardinal de cet ensemble dont le dénombrement se fait à l'aide des polynômes d'Ehrhart. Pour toute solution  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{\frac{K}{2}}) \in \Pi(k_1, k_2)$ , notons  $\pi(\mathbf{n})$  sa probabilité. La probabilité de l'évènement recherché vaut :

$$\sum_{k_2=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}}^{\frac{K}{2}} \sum_{k_1=\frac{K}{2}+1-2k_2}^{\frac{K}{2}} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2}-k_2}{k_1} \sum_{\mathbf{n} \in \Pi(k_1, k_2)} \pi(\mathbf{n})$$

Dans ce qui suit, pour tout  $i = 1, \dots, \frac{K}{2}$ , notons respectivement  $a$ ,  $b$  et  $c$  les probabilités des évènements " $\frac{M}{4} < n_i < \frac{3M}{4}$ ", " $n_i < \frac{M}{4}$ " et " $n_i > \frac{3M}{4}$ ". De l'indépendance entre les superdistricts, on déduit que :

$$\pi(\mathbf{n}) = \prod_{1 \leq i \leq \frac{K}{2}} \pi(n_i)$$

Dans le cas du modèle IAC\*\*,  $\pi(n_i) = \frac{1}{M+1}$  pour tout  $i = 1, \dots, \frac{K}{2}$  et toute valeur de  $n_i$ . On en déduit que :

$$\sum_{\mathbf{n} \in \Pi(k_1, k_2)} \pi(\mathbf{n}) = \phi(k_1, k_2) \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{K}{2}-k_1-k_2}$$

et donc que la probabilité de l'évènement recherché vaut :

$$\begin{aligned} & \sum_{k_2=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}}^{\frac{K}{2}} \sum_{k_1=\frac{K}{2}+1-2k_2}^{\frac{K}{2}} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2}-k_2}{k_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{K}{2}-k_1-k_2} \phi(k_1, k_2) \\ &= \frac{1}{4^{\frac{K}{2}}} \sum_{k_2=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}}^{\frac{K}{2}} \sum_{k_1=\frac{K}{2}+1-2k_2}^{\frac{K}{2}} 2^{k_1} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2}-k_2}{k_1} \phi(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle IAC\*, les calculs sont moins simples car  $\pi(n_i)$  n'est pas uniforme dans chacun des trois intervalles de valeurs entières considérées. Si on approche les différences entre ces probabilités au sein de chacun des trois intervalles par les probabilités de chacun de s trois intervalles, on obtient la formule approchée :

$$\sum_{k_2=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}}^{\frac{K}{2}} \sum_{k_1=\frac{K}{2}+1-2k_2}^{\frac{K}{2}} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2}-k_2}{k_1} a^{k_1} b^{k_2} (1-a-b)^{\frac{K}{2}-k_1-k_2} \phi(k_1, k_2)$$

On déduit de la symétrie  $1-a-b=b$ . Par ailleurs :

$$\begin{aligned} a &= 2 \left[ \sum_{\frac{r}{2}}^r \frac{l+1}{(r+1)^2} \right] - \frac{(r+1)}{(r+1)^2} = \frac{1}{(r+1)^2} \left[ \frac{3}{4}r^2 + \frac{3}{2}r + 2 - (r+1) \right] \\ &= \frac{1}{(r+1)^2} \left( \frac{3}{4}r^2 + \frac{1}{2}r + 1 \right) \text{ où } r = \frac{M}{2} \end{aligned}$$

et donc :

$$b = \sum_{l=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{l+1}{(r+1)^2} = \frac{1}{8} \frac{(r^2 - 2r + 8)}{(r+1)^2} \text{ qui tend, sans surprise, vers } \int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx = \int_{\frac{3}{4}}^1 4(1-x)dx = \frac{1}{8}$$

Dans le cas du mécanisme 3, la démarche est en tout point identique. Il suffit simplement de considérer cette fois les inégalités.

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{\frac{K}{2}} < \frac{MK}{2}$$

$$\frac{M}{3} < n_i < \frac{2M}{3} \text{ pour tout } i = 1, \dots, k_1$$

$$n_i < \frac{M}{3} \text{ pour tout } i = k_1, \dots, k_1 + k_2$$

$$n_i > \frac{2M}{3} \text{ pour tout } i = k_1 + k_2, \dots, \frac{K}{2}$$

Cette fois, dans le cas du modèle IAC \*\*, la formule devien :

$$\begin{aligned} & \sum_{k_2=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}}^{\frac{K}{2}} \sum_{k_1=\frac{K}{2}+1-2k_2}^{\frac{K}{2}} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2}-k_2}{k_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{K}{2}-k_1-k_2} \phi(k_1, k_2) \\ = & \frac{1}{3^{\frac{K}{2}}} \sum_{k_2=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}}^{\frac{K}{2}} \sum_{k_1=\frac{K}{2}+1-2k_2}^{\frac{K}{2}} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2}-k_2}{k_1} \phi(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle IAC\*, on obtient lorsque  $M$  est grand :  $a = \frac{5}{9}$  et  $b = \frac{2}{9}$ .

### 7.3 Appendice 3 : La Probabilité d'une Egalité parfaite

Dans notre présentation du calcul de  $I_1$ , nous avons vu que la dégradation de la note des formules proportionnelles provenait en grande partie de la la probabilité significative de l'évènement " l'assemblée est divisée en deux blocs de taille égale" car cette probabilité intervient affecté du coefficient  $\frac{1}{2}$  dans le calcul de  $I_1$ . Il est utile de traiter séparément cette question et d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de cette probabilité pour les différents modèles et formules électorales considérés.

Lorsque le nombre de superdistricts  $\frac{K}{2}$  est impair, la probabilité d'une égalité parfaite est égale à 0 pour le mécanisme 1 puisque dans chaque district, la paire d'élus est de droite ou de gauche. Il n'en va pas de même pour les mécanismes 2 et 3. Le nombre de configurations de sièges conduisant à un "tie" dans l'assemblée est est le nombre de solutions  $q = (q_1, q_2, \dots, q_{\frac{K}{2}})$  de :

$$q_k \in \{0, 1, 2\} \text{ pour tout } k = 1, \dots, \frac{K}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{\frac{K}{2}} q_k = \frac{K}{2}$$

Le nombre de solutions est égal à :

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=1}^{\lfloor \frac{K}{4} \rfloor} \binom{\frac{K}{2}}{k_2} \binom{\frac{K}{2} - k_2}{\frac{K}{2} - 2k_2} &= \sum_{k_2=1}^{\frac{K}{4}} \frac{\frac{K}{2}!}{k_2! (\frac{K}{2} - k_2)!} \frac{(\frac{K}{2} - k_2)!}{k_2! (\frac{K}{2} - 2k_2)!} \\ &= \sum_{k_2=1}^{\frac{K}{4} - \frac{1}{2}} \frac{(\frac{K}{2})!}{(k_2!)^2 (\frac{K}{2} - 2k_2)!} \end{aligned}$$

La probabilité de l'évènement "l'assemblée est divisée en deux camps égaux" est quant à elle égale à :

$$\begin{aligned} &\sum_{k_2=1}^{\frac{K}{4} - \frac{1}{2}} b^{2k_2} a^{\frac{K}{2} - 2k_2} \frac{(\frac{K}{2})!}{(k_2!)^2 (\frac{K}{2} - 2k_2)!} \\ &= \end{aligned}$$

Dans le cas du mécanisme 3, avec IAC\*\*, cette probabilité est égale à :

$$\frac{1}{3^{\frac{K}{2}}} \sum_{k_2=1}^{\frac{K}{4} - \frac{1}{2}} \frac{(\frac{K}{2})!}{(k_2!)^2 (\frac{K}{2} - 2k_2)!}$$

dont le comportement asymptotique est étudié dans dans Le Breton, Lepelley et Smaoui (2013). Ils démontrent que lorsque  $K$  est grand cette expression est approximativement égale à  $\frac{1}{\sqrt{K}} \times \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$ .

Dans le cas du mécanisme 2, avec IAC\*\*, cette probabilité est égale à :

$$\begin{aligned} &\sum_{k_2=1}^{\frac{K}{4} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{K}{2} - 2k_2} \frac{(\frac{K}{2})!}{(k_2!)^2 (\frac{K}{2} - 2k_2)!} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{K}{2}}} \sum_{k_2=1}^{\frac{K}{4} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k_2} \frac{(\frac{K}{2})!}{(k_2!)^2 (\frac{K}{2} - 2k_2)!} \end{aligned}$$

Par exemple lorsque  $\frac{K}{2} = 21$ , on obtient une probabilité d'égalité parfaite dans l'assemblée égale à :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{21} \sum_{k_2=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k_2} \frac{(21)!}{(k_2!)^2 (21 - 2k_2)!} = 0.12239$$

alors que pour le mécanisme 3 ,on obtient :

$$\frac{1}{3^{21}} \sum_{k_2=1}^{10} \frac{(21)!}{(k_2!)^2 (21 - 2k_2)!} = 0.10567$$

Dans le cas du modèle IAC\*, nous obtenons pour le mécanisme 2 une probabilité d'une égale à :

$$\sum_{k_2=1}^{10} \left(\frac{2}{8}\right)^{2k_2} \left(\frac{6}{8}\right)^{21 - 2k_2} \frac{(21)!}{(k_2!)^2 (21 - 2k_2)!} = 0.17295$$

alors que pour le mécanisme 3 ,on obtient :



$$\sum_{k_2=1}^{10} \left(\frac{2}{9}\right)^{2k_2} \left(\frac{5}{9}\right)^{21-2k_2} \frac{(21)!}{(k_2!)^2 (21-2k_2)!} = 0.13$$

Pour les deux mécanismes et les deux modèles aléatoires, on obtient des probabilités d'égalité parfaite comprises entre 10% et 17%. On peut considérer que ces ordres de grandeur ne sont pas éloignés de ceux découlant d'un modèle statistique tant il est vrai qu'avec une formule proportionnelle et une district magnitude égale à 2, la probabilité qu'un district compte un élu dans chaque camp est relativement importante. Faut-il basculer pour autant dans le mécanisme pluralitaire pour l'éviter? Le législateur aurait très bien pu convenir que dans le cas d'une égalité parfaite, au lieu de réserver au doyen la présidence de l'assemblée, un bonus d'un ou deux sièges soit alloué au camp remportant le suffrage populaire. La taille de l'assemblée dépendrait alors marginalement du résultat du vote. On remarque qu'avec un tel système la discussion conduite dans la section 4.2. disparaît puisque il n'est plus possible d'avoir une égalité parfaite.

S'agissant du mécanisme originel ( $K=42$  et une magnitude égale à 1) rappelons que la probabilité d'une égalité parfaite est égale à :

$$\frac{1}{2^{42}} \frac{(42)!}{(21!)^2} \simeq 12.24\%$$

Notons pour terminer que si le nombre de cantons votant à gauche était tiré selon le modèle IAC conventionnel (ce qui impliquerait une covraince non négligeable entre cantons) la probabilité d'une égalité parfaite serait égale à :

$$\frac{1}{K+1} \text{ ce qui dans le cas où } K = 42 \text{ donne approximativement } 2.33\%$$

On se rapproche des données françaises ce qui tend à suggérer qu'il serait bon d'étudier l'impact de la covraince sur la probabilité de cet événement.

## 7.4 Appendice 4

On considère en premier lieu le mécanisme  $\underline{M}_1$ . Dans chaque superdistrict, le nombre de conseillers de gauche est 0 ou 2 (il est de 2 si le nombre de voix à gauche est supérieur à  $m$ ). Donc  $m^G \in \{0, 2, 4, 6\}$ . On obtient par exemple 2 conseillers de gauche et un pourcentage de voix à gauche compris entre 10% et 20% si :

$$p_1^G + p_2^G \geq 1, \quad p_3^G + p_4^G < 1, \quad p_5^G + p_6^G < 1 \text{ et } \frac{1}{10} < p_1^G + p_2^G + p_3^G + p_4^G + p_5^G + p_6^G < \frac{1}{5},$$

avec  $p_k^G = \frac{n_k^G}{m}$  et  $m$  supposé tendre vers l'infini. Le volume associé est égal à  $\frac{29}{11250000}$  et la probabilité d'avoir à la fois  $m^G = 2$  et  $V_G$  compris entre 10% et 20% est obtenue en multipliant cette fraction par 3. Les résultats sont résumés Table 37 :

On en déduit :

$$I_1(\underline{M}_1) = 2\left(\frac{95577}{1250000} + \frac{1902}{703125}\right) = \frac{19}{120} = 0,158333.$$

TABLE 37 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K/2 = 3$ ,  $r = 2$ ,  $M = \underline{M}_1$ .

$V_G$ $m^G$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	
0	$\frac{81}{1250000}$	$\frac{7639}{1875000}$	$\frac{4227}{125000}$	$\frac{122561}{1875000}$	$\frac{27099}{1250000}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{1250000}$
2	0	$\frac{87}{11250000}$	$\frac{1773}{250000}$	$\frac{336129}{3750000}$	$\frac{124437}{625000}$	$\frac{95577}{1250000}$	$\frac{1902}{703125}$	0	0	0	$\frac{1}{3750000}$
4	0	0	0	$\frac{1902}{703125}$	$\frac{95577}{1250000}$	$\frac{124437}{625000}$	$\frac{336129}{703125}$	$\frac{1773}{250000}$	$\frac{87}{11250000}$	0	$\frac{1}{3750000}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{27099}{1250000}$	$\frac{1902}{703125}$	$\frac{124437}{625000}$	$\frac{87}{11250000}$	$\frac{1773}{250000}$	$\frac{1}{3750000}$
	$\frac{81}{1250000}$	$\frac{15307}{3750000}$	$\frac{10227}{250000}$	$\frac{118279}{750000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{118279}{750000}$	$\frac{10227}{250000}$	$\frac{15307}{3750000}$	$\frac{81}{1250000}$	1

TABLE 38 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K/2 = 3$ ,  $r = 2$ ,  $M = \underline{M}_2$

$V_G$ $m^G$	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	
0	$\frac{15521}{24000000}$	$\frac{92983}{60000000}$	$\frac{27099}{80000000}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{512}$
1	$\frac{93}{720000000}$	$\frac{445299}{180000000}$	$\frac{30859}{25000000}$	$\frac{2210289}{180000000}$	$\frac{42663}{720000000}$	0	0	0	0	0	$\frac{256}{111}$
2	0	$\frac{437}{75000000}$	$\frac{1950292}{80000000}$	$\frac{6182602}{60000000}$	$\frac{20401607}{240000000}$	$\frac{143}{48687397}$	0	0	0	0	$\frac{512}{63}$
3	0	0	$\frac{67761}{80000000}$	$\frac{2542955}{60000000}$	$\frac{48687397}{240000000}$	$\frac{15360}{48687397}$	$\frac{2542955}{80000000}$	$\frac{67761}{1550292}$	0	0	$\frac{63}{128}$
4	0	0	0	0	$\frac{143}{240000000}$	$\frac{15360}{240000000}$	$\frac{60000000}{6182602}$	$\frac{80000000}{1550292}$	$\frac{437}{75000000}$	0	$\frac{111}{512}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{42663}{720000000}$	$\frac{60000000}{210289}$	$\frac{80000000}{30859}$	$\frac{75000000}{445299}$	$\frac{93}{720000000}$	$\frac{512}{9}$
6	0	0	0	0	0	0	$\frac{180000000}{27099}$	$\frac{25000000}{92983}$	$\frac{180000000}{60000000}$	$\frac{720000000}{15521}$	$\frac{256}{1}$
	$\frac{81}{1250000}$	$\frac{15307}{3750000}$	$\frac{10227}{250000}$	$\frac{118279}{750000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{118279}{750000}$	$\frac{10227}{250000}$	$\frac{15307}{3750000}$	$\frac{81}{1250000}$	1

Le passage de 6 districts à 3 districts élisant chacun 2 représentants s'accompagne donc d'une réduction non négligeable du risque de dismajorité. S'agissant de  $I_2(M)$ , nous obtenons :

$$I_2(\underline{M}_1) = 2\left(\frac{81}{1250000} \times \frac{1}{20} + \frac{7639}{1875000} \times \frac{3}{20} + \frac{4227}{125000} \times \frac{1}{4} + \frac{122561}{1875000} \times \frac{7}{20} + \frac{27099}{1250000} \times \frac{9}{20} + \frac{87}{11250000} \times \frac{11}{60} + \frac{1773}{250000} \times \frac{1}{12} + \frac{336129}{3750000} \times \frac{1}{60} + \frac{124437}{625000} \times \frac{7}{60} + \frac{1902}{703125} \times \frac{19}{60} + \frac{95577}{1250000} \times \frac{13}{60}\right) = \frac{9499489}{56250000} = 0,168879,$$

soit une forte augmentation de la disproportionnalité.

Considérons maintenant le mécanisme 2 (scrutin proportionnel au plus fort reste). Après calculs, la loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  est détaillé Table 38.

On en déduit :

$$I_1(\underline{M}_2) = 2\left(\frac{143}{15360}\right) + \frac{48687397}{240000000} + \frac{2542955}{60000000} + \frac{67761}{80000000} = \frac{2033}{7680} = 0,264713.$$

Contrairement au mécanisme 1, le mécanisme 2 augmente la probabilité d'une dismajorité lorsque l'on passe de 6 districts avec chacun 1 représentant à 3 districts avec chacun 2 représentants... mais il s'accompagne aussi d'une réduction nette de la disproportionnalité, comme l'indique le calcul de  $I_2(M)$  :

$$I_2(\underline{M}_2) = 2\left(\frac{15521}{240000000} \times \frac{1}{20} + \frac{92983}{60000000} \times \frac{3}{20} + \frac{27099}{80000000} \times \frac{1}{4} + \frac{93}{720000000} \times \frac{7}{60} + \frac{445299}{180000000} \times \frac{1}{60} + \frac{50859}{2500000} \times \frac{1}{12} + \frac{2210289}{180000000} \times \frac{11}{60} + \frac{42663}{720000000} \times \frac{7}{30} + \frac{437}{7500000} \times \frac{11}{60} + \frac{1550292}{80000000} \times \frac{1}{12} + \frac{6182602}{60000000} \times \frac{1}{60} + \frac{20401607}{240000000} \times \frac{7}{60} + \frac{67761}{80000000} \times \frac{1}{4} + \frac{2542955}{60000000} \times \frac{3}{20} + \frac{48687397}{240000000} \times \frac{1}{20} + \frac{143}{15360} \times \frac{13}{60}\right) = \frac{522890893}{7200000000} = 0,0726237.$$

On considère enfin le scrutin proportionnel à la plus forte moyenne (mécanisme 3). La loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  est présentée dans la Table 39.

TABLE 39 – Loi conjointe de  $V_G$  et  $m^G$  :  $K/2 = 3$ ,  $r = 2$ ,  $M = \underline{M}_3$ .

$V_G$ $m^G$	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	
0	$\frac{81}{1250000}$	$\frac{8932037}{273375000}$	$\frac{20039479}{273375000}$	$\frac{31531}{101250000}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{8}{729}$
1	0	$\frac{1113383}{136687500}$	$\frac{136687500}{455625000}$	$\frac{30579801}{1025156250}$	$\frac{1285248}{512578125}$	0	0	0	0	0	$\frac{243}{38}$
2	0	0	0	$\frac{2293693}{2293693}$	$\frac{43606127}{341718750}$	0	0	0	0	0	$\frac{243}{38}$
3	0	0	0	$\frac{10343161}{1366875000}$	$\frac{219344339}{1366875000}$	$\frac{14580}{97}$	$\frac{10343161}{1366875000}$	0	0	0	$\frac{729}{38}$
4	0	0	0	0	14580	$\frac{341718750}{1285248}$	$\frac{22781250}{50379801}$	$\frac{2555081}{683437500}$	0	0	$\frac{243}{38}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{512578125}{1025156250}$	$\frac{1025156250}{455625000}$	$\frac{136687500}{8885637}$	0	0	$\frac{729}{38}$
6	0	0	0	0	0	0	$\frac{101250000}{118279}$	$\frac{2733750000}{10227}$	$\frac{2733750000}{19307}$	$\frac{1250000}{81}$	$\frac{729}{38}$
	$\frac{81}{1250000}$	$\frac{15307}{3750000}$	$\frac{10227}{250000}$	$\frac{118279}{750000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{22293}{75000}$	$\frac{118279}{75000}$	$\frac{10227}{25000}$	$\frac{19307}{3750000}$	$\frac{1250000}{1250000}$	$\frac{1}{1}$

TABLE 40 – Taux de féminisation - Mandats au 01/02/2013 Métropole et DOM.

Mandats	Mandats Effectifs	Taux de féminisation	$A < 40$	$40 \leq A \leq 59$	$A > 59$
Conseillers régionaux	1880	48.3%	13%	59%	28%
Conseillers départementaux	4052	15.3%	3.8%	41.1%	55.1%
Maires	36646	14.4%	1.8%	38.7%	59.5%

D'où :

$$I_1(\underline{M}_3) = 2\left(\frac{97}{14580}\right) + \frac{10343161}{1366875000} + \frac{219344339}{1366875000} = \frac{661}{3645} = 0,181344.$$

Lorsque le mécanisme 3 est utilisé, le passage 6 districts ( $r = 1$ ) à 3 districts ( $r = 2$ ) entraîne une légère diminution du risque d'occurrence de la dismajorité.

Le calcul de  $I_2(M)$  donne quant à lui :

$$I_2(\underline{M}_3) = 2\left(\frac{81}{1250000} \times \frac{1}{20} + \frac{8932037}{2733750000} \times \frac{3}{20} + \frac{20039479}{2733750000} \times \frac{1}{4} + \frac{31531}{101250000} \times \frac{7}{20} + \frac{1113383}{1366875000} \times \frac{1}{60} + \frac{13595407}{455625000} \times \frac{1}{12} + \frac{2293693}{22781250} \times \frac{1}{60} + \frac{43606127}{341718750} \times \frac{7}{60} + \frac{10343161}{1366875000} \times \frac{3}{20} + \frac{219344339}{1366875000} \times \frac{1}{20} + \frac{97}{14580} \times \frac{13}{60}\right) = \frac{1802943337}{20503125000} = 0,087935.$$

## 7.5 Appendice 5 : Quelques éléments statistiques sur les élus locaux <sup>29</sup>

29. Source : Ministère de l'Intérieur, bureau des élections et des études politiques, in DGCL, Les collectivités locales en chiffres 2013, www.collectivites-locales.gouv.fr.

TABLE 41 – Taux de féminisation - Mandats de Maire : Elections de 2008

Taille $T$ de la Commune	Hommes	Femmes	Total	% des Femmes
$T < 3500$	29058	4829	33887	14.3%
$3500 \leq T < 9000$	1610	182	1792	10.2%
$9000 \leq T < 30000$	725	64	789	8.1%
$30000 \leq T < 100000$	189	24	213	11.3%
$T > 100000$	32	5	37	13.5%
Total	31614	5104	36718	13.9%

TABLE 42 – Répartition des Élus par CSP

Catégorie socio-professionnelle	Conseillers Municipaux	Maire	Conseillers Généraux	Conseillers Régionaux	Population de 15 ans et plus
Agriculteurs exploitants	11.1%	15.6%	5.4%	2.9%	1%
Artisans, commerçants et chefs d'entreprise	11.8%	8%	6.1%	6.4%	3.6%
Cadres et professions intellectuelles supérieures	11.9%	15%	32.3%	32.2%	9%
Professions intermédiaires	11.5%	11%	14.4%	25.6%	13.2%
Employés	20.6%	9.2%	4.7%	8.9%	16.4%
Ouvriers	4.8%	2%	0.4%	1.1%	12.6%
Autres professions	7.7%	4.7%	3.6%	7.6%	
Retraités	19.6%	32.4%	29.9%	9.9%	44.1%
Autres sans activité professionnelle	4%	2%	3.2%	5.4%	
Total	100%	100%	100%	100%	100%

*Elections 2008 pour les maires et les conseillers municipaux. Élections 2010 pour les conseillers régionaux. Élections 2011 pour les conseillers généraux (conseillers départementaux depuis la loi du 17 mai 2013). Insee recensement de la population 2009.*

## 8 Références

- Ansolabehere, S. et J.M. Snyder (2008) *The End of Inequality*, W.W. Norton and Company.
- Balinski, M. et H.P. Young (2001) *Fair Representation : Meeting the Ideal One Man, One Vote*, Yale University Press, Second Edition, Washington.
- Barbera, S. et M.O. Jackson (2006) “On the Weights of Nations : Assigning Voting Weights in a Heterogeneous Union”, *Journal of Political Economy*, 114, 317-339.
- Baron, D. et J.A. Ferejohn (1989) “Bargaining in Legislatures”, *American Political Science Review*, 83, 1181-1206.
- Beisbart, C., Bovens, L. et Hartmann, S. (2005) “A Utilitarian Assessment of Alternative Decision Rules in the Council of Ministers” *European Union Politics* 6(4), 395-418.
- Beisbart, C. et L. Bovens (2013) “Minimizing the Threat of a Positive Majority Deficit in Two-Tier Voting Systems with Equipopulous Units”, *Public Choice*, 154, 75-94.
- Bekmezian H. (2015) “Le Redécoupage Cantonal Devrait Profiter à la Droite”, *Le Monde*, n° 21810, 1 Mars.
- Bervoets S. et V. Merlin (2007) “De la Manipulation des Elections Indirectes” *Revue Economique*, 58(3), 767-777.
- Bervoets, S. et V. Merlin (2012) “Gerrymander-proof Representative Democracies” *International Journal of Game Theory*, 41, 473-488.
- Bissey, M.E., & Mauro Carini & Guido Ortona, 2004. “ALEX3 : a Simulation Program to Compare Electoral Systems,” *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 7(3), p. 3.
- Blais, A. (1988) “The Classification of Electoral Systems”, *European Journal of Political Research*, 16, 99-111.

Blais, A. et L. Massicotte (2003) “La Réforme Electorale : Profil d’un Mode de Scrutin Mixte Approprié au Québec”, in *Hommage à Vincent Lemieux : La Science Politique au Québec. Le Dernier des Fondateurs*, J. Crête (Ed), Presses de l’Université Laval, Québec, 247-269.

Bordley, R.F. (1983) “A Pragmatic Method for Evaluating Election Schemes Through Simulation”, *American Political Science Review*, 77,123-141.

Carey, J. M., et S. Hix (2013) “District Magnitude and Representation of the Majority’s Preferences : a Comment and Reinterpretation”, *Public Choice*,154, 139-148.

Carey, J. M. et S. Hix (2011) “The Electoral Sweet Spot : Low-magnitude Proportional Electoral Systems”, *American Journal of Political Science*, 55, 383–397.

Carey, J.M. and M.S. Shugart (1995) “Incentives to Cultivate a Personal Vote : A Rank Ordering of Electoral Formulas”, *Electoral Studies*, 14, 417-439.

Chamberlin, J.R. and M.D. Cohen (1978) “Toward Applicable Social Choice Choice Theory : A comparison of Social Choice Functions Under Spatial Model Assumptions”, *American Political Science Review*, 72, 1341-1356.

Chambers, C. (2008) “Consistent Representative Democracy” *Games and Economic Behavior*, 62, 348-363.

Chang, E. C. C. et M. Golden “Electoral Systems, District Magnitude and Corruption” *British Journal of Political Science*, 37, 115–137.

Cox, G.W. (1984) “Electoral Equilibrium in Double Member Districts”, *Public Choice*, 44, 443-451

Diamantopoulos, T. (2004) *Les Systèmes Electoraux aux Présidentielles et aux Legislatives*, Editions de l’Université de Bruxelles.

Eggers, A.C. et A.B. Fourinaies (1013) “Representation and District Magnitude in Plurality Systems”, *Electoral Studies*, 30, 1-11.

Feix, M.R., Lepelley, D., Merlin, V. and J.L. Rouet (2004) “The Probability of Conflicts in a U.S. presidential Type Elections”, *Economic Theory*, 23, 227-257.

Felsenthal, D.S. et M. Machover. (1998) *The Measurement of Voting Power*, Edward Elgar, Cheltenham.

Felsenthal, D.S. et Machover, M. (1999) “Minimizing the Mean Majority Deficit : The Second Square-root Rule” *Mathematical Social Sciences* 37, 25-37.

Ferejohn, J. (1986) “Incumbent Performance and Electoral Control”, *Public Choice*, 50, 5-25.

Gallagher, M. (1991) “Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems, *Electoral Studies*, 10, 33-51.

Gerhlein, W.V. (2006) *Condorcet Paradox*. Springer.

Gerhlein, W.V. et D. Lepelley (2010) *Voting Paradoxes and Group Coherence : The Condorcet Efficiency of Voting Rules*. Springer.

Gregor, M. (2013) “The Optimal Ballot Structure for Double-Member Districts”, Charles University, Prague, Mimeo.

Grilli di Cortona, P., Manzi, C., Pennisi, A., Ricca, F. et B. Simeone (1999) *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, Siam Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Siam.

- Hix, S., Johnston, R. et I. McLean (2010) *Choosing an Electoral System*, Research Report prepared for the British Academy.
- Lahrach, R. et V. Merlin (2012) “Which Voting Rules Minimizes the Probability of the Referendum Paradox : Lessons from French Data”, Chapter 5 in *Electoral Systems*, Studies in Social Choice and Welfare, Felsenthal, D.D.S. and M. Machover (Eds), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Le Breton, M., Lepelley, D. et H. Smaoui (2012) “The Probability of Casting a Decisive Vote : From IC to IAC through Ehrhart’s Polynomials and Strong Mixing”, Mimeo.
- Lijphart, A. and B. Grofman (1984), Introduction in *Choosing an Electoral system : Issues and Alternatives*, A. Lijphart and B. Grofman (Eds), Praeger, New York.
- Martin, P. (1997) *Les Systèmes Electoraux et les Modes de Scrutin*, Editions Montchrestien, Paris.
- Maurey, H. and P.Y. Collombat (2010) “Rapport d’Information sur les Modes de Scrutin Envisageables pour l’Election des Conseillers Territoriaux”, Sénat, Rapport N°509.
- May, K. (1948) “Probability of Certain Election Results”, *American Mathematical Monthly*, 55, 203-209.
- May, K. (1952) “A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decisions”, *Econometrica*, 20, 680-684.
- Merrill, S. (1978) “Citizen Voting Power Under the Electoral College : A Stochastic Model Based on State Voting Patterns”, *Siam Journal on Applied Mathematics*, 34, 376-390.
- Merrill, S. (1977) “Empirical Estimates for the Likelihood of a Divided Verdict in a Presidential election”, *Public Choice*, 33, 127-133.
- Merrill, S. (1984) “A Comparison of Efficiency of Multicandidate Electoral Systems”, *American Journal of Political Science*, 28, 23-48.
- Merrill, S. (1985) “A Statistical Model for Condorcet Efficiency Based on Simulation Under Spatial Model Assumptions”, *Public Choice*, 47, 389-403.
- Migheli, M. et G. Ortona (2010) “Majority, Proportionality, Governability and Factions”, Università Del Piemonte Orientale, Mimeo.
- Miller N. (2015) “Election Inversions under Proportional Representation”, *Scandinavian Political Studies*, 38(1), 4-25.
- Neubauer, M.G., Schilling, M. et J. Zeitlin (2012) “Exploring Unpopular Presidential Elections”, California State University, Mimeo.
- Nermuth (1992) “Two-stage Discrete Aggregation : the Ostrogorski Paradox and Related Phenomena, *Social Choice and Welfare*, 9, 99-116.
- Norris, P. (2004) *Electoral Engineering*, Cambridge University Press.
- Nurmi, H. (1999) *Voting Paradoxes, and How to Deal with Them ?* Springer.
- Persson, T. and G. Tabellini (2003) *The Economic Effects of Constitutions*, The MIT Press, Cambridge.
- Portmann, M., Stadelmann, D. et R. Eichenberger (2012) “District Magnitude and Representation of the Majority’s Preferences : Evidence from Popular and Parliamentary Votes”, *Public Choice*, 151, 585–610.

- Pukelsheim, F. (2010) *Proportional Representation : Apportionment Methods and their Applications*, Springer, Heidelberg.
- Powell, G. B. et G. Vanberg (2000) "Election Laws, Disproportionality and Median Correspondence : Implications for Two Visions of Democracy", *British Journal of Political Science*, 30, 383–411.
- Sainte-Laguë, A. (1910) "La Représentation Proportionnelle et la Méthode des Moindres Carrés", *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 27, 529-542.
- Shugart, M.S. (2013) Why Ballot Structures Matter, Chapter 4 in *Political Science, Electoral Rules and Democratic Governance*, Report of the Task Force on Electoral rules and Democratic Governance, M. Htun and G Bingham Powell (Eds), APSR.
- Straffin, P.D. (1977) "Homogeneity, Independence and Power Indices", *Public Choice*, 30, 107-118.
- Taagepera, R. and M.S. Shugart (1989) *Seats and Votes : The effects and Determinants of Electoral Systems*, Yale University Press, New Haven.
- Taylor, A.D. et W.S. Zwicker (1999) *Simple Games*, Princeton University Press.
- Tsebelis, G. (2002) *Veto Players : How Institutions Work*, Princeton University Press, New Jersey.
- Weber, R.J. (1977) "Comparison of Voting Systems", Cowles Foundation, Yale University, Discussion Paper N°498A.