Introduction à la théorie des jeux (2) : les jeux coopératifs[1]

Dominique LEPELLEY, Michel PAUL et Hatem SMAOUI
CEMOI

1. Introduction

En théorie des jeux, les approches coopérative et non coopérative se distinguent au regard de deux éléments. Le premier renvoie à la capacité d'engagement des joueurs : dans un contexte non-coopératif, ils sont entièrement libres de leurs décisions au moment où ils font leurs choix ; en revanche, dans un contexte coopératif, ils ont la possibilité de s'engager de façon contractuelle sur les stratégies qu'il conviendra d'adopter au cours du jeu, cela durant une phase de discussion qui se tient avant le jeu et au cours de laquelle des coalitions peuvent se former. Dans ce cadre, le problème n'est pas tant de prévoir l'issue du jeu que de répartir entre les joueurs le bénéfice de la coopération : l'analyse coopérative propose ainsi des règles d'arbitrage. Pour y parvenir, et c'est là la seconde grande différence avec l'approche non coopérative, elle adopte une démarche axiomatique (ou normative) par laquelle on pose en amont des propriétés a priori raisonnables (ou souhaitables) sur les résultats du jeu, puis, ces propriétés étant posées, on sélectionne les issues qui y satisfont (issues dites coopératives), et on écarte celles qui n'y satisfont pas.

Le texte qui suit présente successivement les *jeux de négociations* dans un cadre restreint à deux joueurs puis les *jeux coalitionnels* qui prennent explicitement en compte la possibilité qu'ont les joueurs de constituer des coalitions.

[1] Ce texte a été préparé en vue d'une publication dans la revue *Ecoflash* (CNDP).

2. Les jeux de négociation

Ensemble de négociation et ensemble de VNM

Un jeu de négociation décrit une situation dans laquelle deux joueurs doivent choisir soit le *statu quo* soit une option dans un ensemble d'accords possibles. Malgré des intérêts divergents, certains accords leurs paraissent mutuellement bénéfiques et donc préférables au statu quo ; ils peuvent donc décider d'entamer une négociation dans le but de parvenir à un compromis. Dans ce contexte, la possibilité de maintenir le statu quo peut être interprétée comme une menace qui se concrétisera si les deux joueurs n'arrivent pas à se mettre d'accord sur une option particulière. Du point de vue formel, un jeu de négociation est défini par une structure (U, d) dans laquelle U désigne l'*ensemble de négociation* qui décrit l'ensemble des règlements $u = (u_1, u_2)$ que les joueurs peuvent obtenir en signant, avant le déroulement du jeu, des contrats spécifiant ce qui sera joué par chacun, et $d = (d_1, d_2)$ est *le point de menace* qui précise les règlements obtenus en cas de désaccord.

Exemple 1. Le dilemme du prisonnier.

	α	β
a	1,1	5,0
b	0,5	4,4

L'ensemble de négociation associé à ce jeu est représenté par les quatre points A, B, C, D sur la Figure 1 ; quant au point de menace, il est constitué des règlements obtenus à l'équilibre non coopératif (a, α) : $d_1 = d_2 = 1$.

Exemple 2. Le *jeu de banqueroute*. Soit une firme en faillite, dont l'actif vaut 100. Deux créanciers (1 et 2) se présentent. La firme doit 50 au premier et 70 au second. Il s'agit de répartir la somme de 100 entre les deux créanciers. Dans ce jeu, le point de menace est $d_1 = d_2 = 0$ et l'ensemble de négociation est constitué des couples (u_1, u_2) vérifiant $0 \leq u_1 \leq 50$, $0 \leq u_2 \leq 70$ et $u_1 + u_2 = 100$.

Disposant de l'information (U, d), il s'agit d'identifier l'élément $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ de U sur lequel les joueurs *devraient* se mettre d'accord. Un premier outil permettant de répondre à cette question est fourni par *l'ensemble de von Neumann & Morgenstern* (*VNM*) qui identifie les éléments, appelés *imputations*, satisfaisant à deux conditions : *la rationalité individuelle* (ou *contrainte de participation*) selon laquelle chacun doit obtenir au moins autant en coopérant qu'en ne coopérant pas ($u_i \geq d_i \; i = 1, 2$) et *la rationalité collective* qui contraint le résultat de la négociation à être un optimum de Pareto. Ces deux conditions sont difficilement discutables *a priori*. En particulier, un joueur parce qu'il peut toujours refuser de contracter ne peut clairement perdre à la négociation. D'autre part, un accord qui ne serait pas Pareto optimal souffre de la possibilité d'un gain par arbitrage (renégociation). L'approche non coopérative et le « Folk Theorem » (Encadré 1) fournissent également des éléments d'ordre théorique permettant de justifier le bien-fondé de ces conditions.

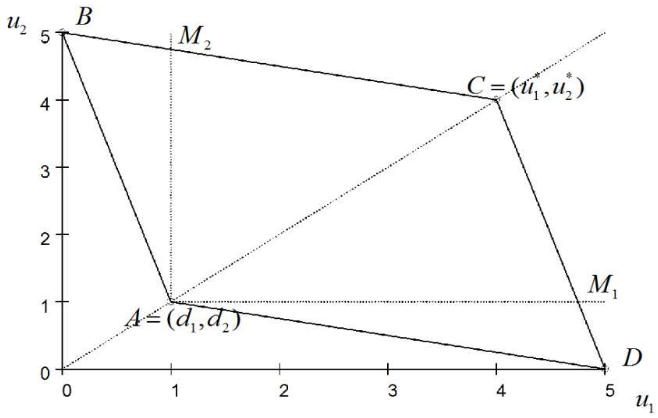

Figure 1

Ces deux conditions peuvent suffire pour déterminer le résultat de la négociation. Dans l'exemple 1, il existe parmi les optima de Pareto (au nombre de trois) un seul résultat satisfaisant aux contraintes de rationalité individuelle $u_1 \geq 1$ et $u_2 \geq 1$: le couple de stratégies (b, β) (point C sur la Figure). Cette configuration constitue toutefois l'exception, l'ensemble de VNM contenant en règle générale plusieurs éléments, comme dans l'exemple 2. Pour pouvoir lever l'indétermination, il convient alors de pousser plus loin la démarche axiomatique en introduisant des conditions additionnelles ; c'est précisément la voie qu'emprunta John Nash.

La solution de Nash

Les propriétés exigées par Nash sont l'appartenance à l'ensemble de VNM (A1), la symétrie (A2) et l'indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes (A3). A2 énonce que les joueurs doivent obtenir la même chose dans des jeux de négociation symétriques où rien ne permet de les distinguer. A3 impose quant à elle une certaine rationalité dans le choix collectif. Etant donné un jeu initial (U, d) et un jeu réduit (V, d) avec $V \subset U$, elle demande que l'équilibre coopératif du jeu initial (u_1^*, u_2^*) soit encore celui du jeu réduit si (u_1^*, u_2^*)

demeure possible dans V. Ces conditions posées, Nash montre qu'il existe une unique solution satisfaisant A1, A2 et A3. Elle consiste à sélectionner dans l'ensemble de VNM le couple de stratégies (s_1, s_2) qui maximise le produit des gains coopératifs $(u_1(s_1, s_2) - d_1) \times (u_2(s_1, s_2) - d_2)$. Dans le jeu de la banqueroute, la détermination de la solution de Nash requiert la résolution du problème suivant : Max $u_1 \times u_2$ sous les contraintes $0 \leq u_1 \leq 50$, $0 \leq u_2 \leq 70$ et $u_1 + u_2 = 100$. On obtient : $(u_1^*, u_2^*) = (50{,}50)$. N'importe quel point de l'ensemble de VNM peut toutefois être sélectionné lorsqu'on lève la symétrie (Encadré 2).

L'axiome d'indépendance (A3), qui fonde la solution de Nash, a fait l'objet de nombreux débats : s'il est difficilement discutable pour des problèmes de décision individuelle, il ne va pas nécessairement de soi en matière de décision collective car il ne fait jouer aucun rôle aux concessions que les joueurs sont susceptibles de faire. Les critiques à son encontre ont conduit des auteurs comme Kalaï et Smorodinsky (1975) à suggérer des propositions alternatives, débouchant sur des résultats différents de la solution de Nash dans les jeux de négociation asymétriques. Face à ces critiques, Nash proposa de retenir comme solution celle qui serait compatible avec les équilibres d'un jeu stratégique dans lequel la négociation serait modélisée de façon explicite et résolue par une approche non coopérative. Ce programme qui vise à donner des fondements stratégiques à une solution axiomatique est appelé *le programme de Nash*. Il a débouché sur l'étude d'une classe de jeux particuliers, *les jeux d'offres alternées*, dont les équilibres vont largement dans le sens de la solution de Nash. Cet élément explique pourquoi la solution de Nash est utilisée de façon quasi systématique dans les travaux théoriques et empiriques. On pense notamment à la théorie des syndicats et aux estimations économétriques de ses modèles qui conduisent à des mesures du pouvoir de négociation syndical de l'ordre de 0.20 à 0.40 (voir notamment Crépon et alii, 1999).
On soulignera, pour conclure cette section, que la solution de Nash peut sans difficulté se généraliser à plus de deux joueurs. Reprenons pour l'illustrer le jeu de la banqueroute et supposons qu'il y ait trois créanciers (1, 2 et 3) : la firme doit 30 au premier, 40 au deuxième et 50 au troisième. Le problème s'écrit alors : Max $u_1 \times u_2 \times u_3$ sous les contraintes $u_1 + u_2 + u_3 = 100$, $u_1 \leq 30$, $u_2 \leq 40$, $u_3 \leq 50$ et $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. La résolution donne $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (30, 35, 35)$. Ce résultat confirme la tendance de la solution de Nash à favoriser les créances les plus faibles dans les problèmes de faillite.

Encadré 1. Ensemble de VNM et Folk Theorem Le Folk Theorem est un résultat de la théorie des jeux non coopératifs qui permet une certaine jonction avec l'approche coopérative.

Il caractérise les équilibres de Nash parfaits en sous jeux (ENPSJ) d'une classe de jeux particuliers : les jeux répétés. Ces jeux sont constitués d'un jeu de base J, le dilemme du Prisonnier par exemple, auquel les joueurs vont jouer à plusieurs reprises en observant à chaque étape ce qui a été joué au tour précédent (on obtient ainsi un jeu dynamique à information imparfaite, noté J^T, que l'on appelle un super-jeu). L'ambition première des jeux répétés est de prendre en compte le caractère répétitif des relations sociales lorsqu'elles s'inscrivent dans une perspective de long terme. Le grand résultat les concernant est de montrer que ce caractère joue un rôle dans la mesure où, même si le jeu de base admet un unique équilibre, le jeu répété peut admettre plusieurs équilibres dans lesquels les joueurs jouent à chaque étape des actions qui ne sont pas en équilibre dans le jeu de base. En d'autres termes, l'équilibre d'un super-jeu J^T ne se résume pas à répliquer l'équilibre du jeu de base J. Sous certaines conditions, le Folk Theorem établit que tout élément de l'ensemble de négociation, élargi au quadrilatère $ABCD$ sur la Figure 1, satisfaisant aux contraintes de participation est soutenable par un ENPSJ dans un jeu répété. Cela valant aussi pour les éléments de l'ensemble de VNM, les issues coopératives d'un jeu de base peuvent émerger à l'équilibre non coopératif du super-jeu, interprété comme l'équilibre d'une relation longue, et ce même si elles ne sont pas en équilibre dans le jeu de base, regardé comme l'équilibre d'une relation courte. Des joueurs qui n'auraient pas la possibilité de signer des contrats exécutoires peuvent ainsi parvenir à coopérer de façon informelle [1].

Encadré 2. Solution de Nash Généralisée et Duopole à la Cournot La solution de Nash admet une forme généralisée (SNG) qui consiste à maximiser, dans l'ensemble de VNM, la moyenne géométrique des gains coopératifs $(u_1(s_1, s_2) - d_1)^\theta \times (u_2(s_1, s_2) - d_2)^{1-\theta}$ avec $\theta \in [0,1]$ un paramètre mesurant le pouvoir de négociation du joueur 1 (celui du joueur 2 vaut $1 - \theta$). Lorsque $\theta = 1/2$, on retrouve le cas symétrique où le pouvoir de négociation est également distribué entre les joueurs. Les cas polaires $\theta = 0$ et $\theta = 1$ décrivent quant à eux des jeux d'ultimatum dans lesquels un joueur, parce qu'il bénéficie de l'intégralité du pouvoir de négociation, sélectionne le contrat qu'il préfère mais sous la contrainte de participation de l'autre joueur (ces solutions qui s'apparentent à des situations de monopole sont représentées par les points M_1 et M_2 sur la Figure 1, pour un ensemble de négociation constitué du quadrilatère $ABCD$). Appliquée au duopole à la Cournot, la SNG prédit que les entreprises qui coopèrent (collusion) se partageront la production et le profit de monopole au prorata de leurs pouvoirs de négociation.

3. Jeux coalitionnels

S’il est possible de généraliser le modèle de négociation et la solution de Nash à des problèmes impliquant plus de deux joueurs, cette extension ne permet pas cependant d’analyser les situations où les agents peuvent se regrouper en *coalitions* (sous-ensembles de joueurs) pour coopérer. Le cadre des *jeux coalitionnels* (ou coopératifs) permet de prendre en considération cet aspect important du comportement coopératif que représente la possibilité de former des alliances. On se limitera ici au contexte de *l’utilité transférable* où la négociation porte sur le partage d’un bien divisible que les joueurs évaluent en utilisant la même échelle utilitaire. Cela suppose notamment qu’une « monnaie » commune existe et que les joueurs peuvent effectuer des transferts « monétaires » entre eux. Partant de l’hypothèse selon laquelle la grande coalition s’est formée, on se pose la question de la répartition entre les joueurs du résultat de la coopération, en tenant compte du potentiel de chacune des coalitions.

Cette problématique générale couvre de nombreuses situations réelles, notamment dans les domaines de l’économie et de la politique (partage de coûts, distribution de gains, exploitation de ressources communes, mesure du pouvoir de décision, etc.). Les deux exemples suivants sont représentatifs de deux applications traditionnelles des jeux coalitionnels.

Exemple 3 (allocation de coûts). Trois villes voisines (A, B et C) sont en contrat avec une société pour réaliser des adductions d’eau. Le projet revient à 10 (millions d’euros) pour chaque municipalité prise séparément. Pour des raisons géographiques, le constructeur propose des coûts (réduits) de respectivement 16, 17 et 18 pour des contrats communs entre A et B, A et C, et B et C. Le contrat impliquant les trois villes a un coût de 24. Comment les coûts devraient-ils être répartis entre les trois villes ?

Exemple 4 (pouvoir de décision). Une société a quatre actionnaires, détenant respectivement 40%, 30%, 20% et 10% des actions. Les décisions sont prises à la majorité des voix (une proposition doit, pour l’emporter, réunir plus de 50% des parts), chaque actionnaire ayant un poids proportionnel à sa part. Quel est le pouvoir de décision de chacun des actionnaires ?

Fonction caractéristique

Le cadre formel dans lequel ce genre de questions peut-être examiné est simple. Il se résume à un couple (N, v) où N est un ensemble de n joueurs $(n \geq 2)$ et v une fonction dite *caractéristique* qui associe à chaque coalition S une *valeur* $v(S)$. Cette fonction informe sur les résultats que peuvent obtenir les différentes coalitions en précisant le montant que les membres d'une coalition S peuvent s'assurer (et se partager) s'ils coopèrent ensemble, sans l'aide de joueurs extérieurs à leur groupe.

Le problème de l'exemple 3 peut être décrit par un jeu à trois joueurs, $N = \{A, B, C\}$, où la valeur d'une coalition S est définie par l'économie de coût qu'un contrat commun entre ses membres permet de réaliser (comparé à la situation où chaque ville de S signerait un contrat individuel). On obtient ainsi $v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$, $v(\{A, B\}) = 4$, $v(\{A, C\}) = 3$, $v(\{B, C\}) = 2$ et $v(N) = 6$. On notera que, dans ce jeu, la coopération n'est jamais génératrice de perte, au sens où la somme des valeurs de deux coalitions disjointes est toujours inférieure ou égale à la valeur qui résulte de leur fusion. Cette propriété appelée *super-additivité* est souvent retenue comme une condition naturelle qui doit être satisfaite par la fonction caractéristique d'un jeu coopératif ; elle permet notamment de justifier l'hypothèse de formation de la grande coalition.

L'exemple 4 décrit une situation relevant de la classe des *jeux simples* dans lesquels la fonction caractéristique ne prend que deux valeurs : 1 si la coalition vérifie une propriété donnée et 0 sinon (avec $v(N) = 1$). Ce type de jeux est utilisé pour modéliser des situations de vote et étudier le pouvoir de décision, la propriété concernée étant celle d'avoir la capacité d'emporter la décision (on dit alors que la coalition est *gagnante*). L'exemple 4 correspond donc à un jeu simple avec $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v(S) = 1$ si S est l'une des coalitions $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ et $v(S) = 0$ sinon.

Il s'agit à présent de déterminer la ou les répartitions permettant de satisfaire au mieux l'ensemble des joueurs. Plusieurs concepts de solution ont été proposés pour résoudre les jeux coalitionnels ; l'un des plus connus est celui de *cœur* (ou de noyau).

Le concept de cœur

Le principe général de ce concept de solution, introduit par Gillies (1953), est de retenir toutes les répartitions de la valeur $v(N)$ qu'aucune coalition de joueurs ne peut contester. On part de l'ensemble des allocations possibles $x = (x_1, \dots, x_n)$, avec x_i la part du joueur i ; on note $x(S)$ la somme des parts des membres d'une coalition S. Une première restriction consiste à ne garder que les imputations, c'est-à-dire les allocations efficaces ($x(N) = v(N)$) et individuellement rationnelles ($x_i \geq v(i)$ pour tout i). Cela permet d'éviter les contestations individuelles mais les objections formulées conjointement par les membres d'une coalition restent possibles. Par exemple, dans le jeu d'allocation de coûts, si l'imputation $x = (1.5, 1.5, 3)$ est proposée, donc si les villes A, B et C payent respectivement 8.5, 8.5 et 7 millions d'euros, la coalition $\{A, B\}$ peut s'opposer à ce partage car $x(\{A, B\}) = 3$ alors que $v(\{A, B\}) = 4$. Pour appuyer son objection, elle peut proposer l'imputation $(2, 2, 2)$ qui est à la fois meilleure pour chacun de ses membres (ils obtiennent tous des parts plus importantes) et réalisable (la somme des parts ne dépasse pas la valeur de la coalition). On dit alors que $\{A, B\}$ préfère $(2, 2, 2)$ à $(1.5, 1.5, 3)$ et que l'imputation $(1.5, 1.5, 3)$ est *dominée* parce que *bloquée* par $\{A, B\}$. En rejetant toutes les imputations dominées, on écarte toute possibilité de contestation de groupe et on obtient le cœur du jeu, défini donc comme l'ensemble des imputations non dominées.

On montre que, lorsque le jeu est super-additif, les allocations du cœur sont caractérisées par le système de contraintes linéaires $x(N) = v(N)$ et $x(S) \geq v(S)$ pour toute coalition S. Cette définition alternative est souvent utilisée pour les calculs. Pour l'exemple 3, une allocation (x_1, x_2, x_3) est donc dans le cœur si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + x_3 \geq 3$ et $x_2 + x_3 \geq 2$. Cela ne donne pas de solution unique, puisque plusieurs propositions de partage vérifient ces conditions, par exemple, l'allocation égalitaire $(2, 2, 2)$, ou des solutions extrêmes comme $(4, 2, 0)$, $(3, 3, 0)$ et $(4, 0, 2)$. En fait, le cœur apporte rarement une solution définitive au problème de partage ; il permet simplement de délimiter le domaine auquel doivent appartenir les solutions, en réduisant l'ensemble des imputations à sa partie stable (celles des propositions incontestables). En fonction de la compatibilité des contraintes et des éventuelles redondances, ce domaine peut être infini ou vide, et très rarement réduit à un point unique.

L'exemple 4 est un cas typique d'un jeu de vote ayant un cœur vide. Cela vient de l'absence dans ce jeu d'un *détenteur de droit de veto*, c'est-à-dire d'un joueur présent dans toutes les coalitions gagnantes (à ne pas confondre avec un *dictateur* dont la simple présence au sein d'une coalition est la seule condition pour qu'elle soit gagnante). En effet, les groupes $\{1, 2\}$,

$\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$ et $\{2,3,4\}$ ont tous la capacité d'emporter la décision. Toute solution appartenant au cœur doit donc satisfaire la rationalité collective de ces trois coalitions. En particulier, elle doit distribuer des parts dont la somme est égale à 1 à la fois à $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$ et $\{1,2,3\}$. Cela n'est possible qu'avec le partage $(1,0,0,0,0)$. Mais cette proposition sera bloquée par $\{2,3,4\}$, en objectant par exemple l'imputation $\left(0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Le cœur n'offre donc aucune aide aux actionnaires pour connaître leurs pouvoirs de décision respectifs.

De manière plus générale, on montre que pour que le cœur d'un jeu simple ne soit pas vide, il faut et il suffit qu'un ou plusieurs joueurs détiennent un droit de veto. Des résultats comme ceux de Bondareva (1963) et Shapley (1971) ont permis d'identifier d'autres classes de jeux où le cœur n'est jamais vide. C'est le cas notamment des jeux dits *convexes* dans lesquels la *contribution marginale* d'un joueur à une coalition ne décroît pas quand cette coalition s'élargit (la contribution marginale $C_i(S)$ du joueur i à la coalition S étant définie par $C_i(S) = v(S) - v(S-\{i\})$). On vérifie aisément que le jeu des actionnaires n'est pas convexe (car $C_1(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) - v(\{1,\}) = 1 - 0 = 1$ et $C_1(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 1 - 1 = 0$).

Les situations de vacuité et d'indétermination rencontrées plus haut ne doivent pas être interprétées nécessairement comme des exemples des limites du concept de cœur. En effet, perçu comme un moyen de mesurer la stabilité des coalitions, et non comme un procédé devant produire une réponse unique, il informe dans le premier cas (vacuité) de la fragilité d'un éventuel accord en raison des multiples possibilités de blocage, et dans le second (indétermination) de la richesse des opportunités de coopération. Ce concept, dont le fondement a été posé par Edgeworth en 1881, occupe une place importante dans l'analyse microéconomique, notamment dans le cadre d'une économie d'échange ou d'une économie de production, comme le montrent les travaux d'auteurs tels que Shubik, Debreu et Scarf [3]. Pour des réponses précises et systématiques à des problèmes de partage et de mesure de pouvoir de décision, des outils comme le nucléole (Schmeidler, 1969), non présenté dans ce texte, ou la valeur de Shapley sont plus appropriés et plus opérationnels.

La valeur de Shapley

A la différence du cœur, qui est un concept de solution ensembliste, la valeur de Shapley est une règle d'allocation qui se présente comme une fonction qui à chaque jeu coopératif associe une solution unique sous la forme d'une allocation spécifiant la part (ou la *valeur*) que chaque joueur doit recevoir. Comme la solution de Nash, elle est le résultat d'une approche axiomatique. Cette axiomatisation fait appel à la notion de joueur *nul* (joueur dont toutes les contributions marginales sont nulles) et à la notion de joueurs *substituts* (ou symétriques : ils ont exactement les mêmes contributions marginales à toutes les coalitions). Les conditions exigées par Shapley sont (1) l'e*fficacité* (la somme des valeurs individuelles doit être égale à $v(N)$), (2) la s*ymétrie* (deux joueurs substituts doivent avoir la même valeur), (3) la *nullité* (un joueur nul doit avoir une valeur nulle) et (4) l'*additivité* (la solution d'un jeu défini comme la somme de deux jeux doit être égale à la somme des solutions de ces deux jeux).

Dans un résultat devenu central en théorie des jeux coopératifs, Shapley (1953) a montré que ces quatre axiomes déterminent une unique règle d'allocation, celle qui à chaque jeu (N, v) associe le partage $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$ où la valeur du joueur i est une somme pondérée de ses contributions marginales : $\varphi_i(v) = \frac{1}{n} \sum_S \frac{1}{\alpha(S)} C_i(S)$, $\alpha(S)$ désignant le nombre de coalitions qui contiennent i et qui ont la même taille que S.

Une formule équivalente, et plus pratique, utilise une définition légèrement différente de la notion de contribution marginale. Supposons que les joueurs rejoignent la grande coalition, l'un après l'autre, en respectant un ordre p (d'arrivée ou d'entrée). Dans ce cas, la contribution marginale du joueur i selon l'ordre p, notée $D_i(p)$, est définie par son apport à la coalition constituée des joueurs qui l'ont précédé. Sa valeur de Shapley (notée φ_i pour simplifier) est alors égale à la moyenne arithmétique de ses contributions marginales lorsque les joueurs arrivent selon n'importe quel ordre. Le nombre d'ordres (ou permutations) possibles pour un ensemble de n joueurs étant égal à $n!$, on a : $\varphi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_p D_i(p)$.

Dans le jeu d'allocation des coûts, il y a 6 ordres d'arrivée possibles (3!). Ils sont répertoriés dans le tableau suivant qui donne les contributions marginales selon chacun d'eux. Par exemple, $D_A(\boldsymbol{A}BC) = v(\{A\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$, $D_B(A\boldsymbol{B}C) = v(\{AB\}) - v(\{A\}) = 4 - 0 = 4$, etc..

Ordre d'entrée	Contributions marginales		
	A	B	C
ABC	0	4	2
ACB	0	3	3
BAC	4	0	2
BCA	4	0	2
CAB	3	3	0
CBA	4	2	0
Total	14	12	9
Valeur de Shapley	$\frac{15}{6}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{9}{6}$

La répartition des 6 millions de réduction de coûts selon la valeur de Shapley est donc donnée par $\varphi(v) = (2.5, 2, 1.5)$. En termes de partage de coûts, cela signifie que, sur les 24 millions d'euros, les villes A, B et C auront à payer 7.5, 8, et 8.5 respectivement. On peut vérifier que cette solution satisfait aux conditions qui caractérisent le cœur de ce jeu. Dans ce cas, la valeur de Shapley peut être interprétée comme un raffinement de la solution préconisée par le cœur.

La même méthode de calcul peut être utilisée pour étudier le jeu de banqueroute (exemple 2). Dans la version à trois joueurs, la valeur $v(S)$ d'une coalition peut se calculer comme le montant que cette coalition obtient une fois remboursés les créanciers n'appartenant pas à la coalition : $v(\{1\}) = 10$, $v(\{2\}) = 20$, $v(\{3\}) = 30$, $v(\{1,2\}) = 50$, $v(\{1,3\}) = 60$, $v(\{2,3\}) = 70$ et $v(\{1,2,3\}) = 100$. Le lecteur vérifiera que le cœur est non vide et que $\varphi_1 = 23\,\frac{1}{3}$, $\varphi_2 = 33\,\frac{1}{3}$, $\varphi_3 = 43\,\frac{1}{3}$. Cette solution est proche (mais différente) de l'imputation proportionnelle consistant à répartir la somme de 100 proportionnellement aux créances de chacun.

La valeur de Shapley permet aussi d'apporter une réponse précise au problème décrit par le jeu des actionnaires. On observera d'abord que dans les jeux de vote, la contribution marginale d'un joueur i selon un ordre p ne prend que deux valeurs possibles, 0 ou 1. Lorsque $D_i(p) = 1$, cela signifie que la coalition constituée des joueurs précédant i, était perdante avant son arrivée et qu'avec lui, elle devient gagnante (on dit que i est *pivot* dans l'ordre p). On obtient ainsi la formule simplifiée de la valeur de Shapley :

$$\varphi_i = \frac{nombre\ de\ permutations\ o\grave{u}\ i\ est\ pivot}{n!}$$

Dans le jeu de l'exemple 4, les coalitions gagnantes sont $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4\}$. On remarque que, malgré des parts d'actions différents, 2 et 3 sont substituts. Par la symétrie, on obtient $\varphi_2 = \varphi_3$. L'efficacité se traduit alors par l'égalité $\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_4 = v(N) = 1$. Il suffit donc de calculer φ_2 et φ_4 pour connaître la valeur de Shapley de ce jeu. Le joueur 4 n'est en position de pivot que lorsqu'il arrive immédiatement après 2 et 3. Ce qui correspond à deux ordres possibles : 23**4**1 et 32**4**1. On en déduit que $\varphi_4 = \frac{2}{24} \cong 0.083$. Un calcul du même genre montre que $\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{6}{24} = 0.25$, et donc $\varphi_1 = \frac{10}{24} \cong 0.417$. On constate que le pouvoir de décision dont dispose les actionnaires n'est pas proportionnel au pourcentage d'actions détenues.

Appliquée aux jeux simples, la valeur de Shapley est connue sous le nom *d'indice de Shapley-Shubik*. Cet indice est devenu un instrument très utile pour la mesure du pouvoir de vote dans les processus de décision collective, notamment ceux des organisations internationales (Encadré 3). Pour les problèmes de partage de coûts, elle a été utilisée avec succès dans de nombreuse applications ; citons la répartition des frais entre les divisions du constructeur aéronautique McDonnell-Douglas, le partage des coûts de location des lignes téléphoniques d'une université américaine, le financement du développement de projets d'irrigation en eau dans le Tennessee, ou la fixation des frais d'atterrissage à l'aéroport de Birmingham. On peut cependant regretter que le recours à cet outil (et plus généralement, aux solutions proposées par la théorie des jeux coopératifs) reste limité, malgré diverses études montrant que les répartitions effectuées dans la réalité sont souvent inéquitables. Un des exemples les plus connus est celui donné par Owen (1981) sur les droits d'atterrissage, où la comparaison entre partage réel et partage théorique montre que les petits avions payent trop cher, « subventionnant » ainsi les gros.

Encadré 3. La mesure du pouvoir de décision dans les organisations internationales

Le *Conseil de sécurité des Nations Unies* est composé de 5 membres permanents (la Chine, la France, les Etats-Unis, le Royaume- Uni et la Russie) et de 10 membres non permanents (élus pour deux ans et renouvelés pour moitié chaque année). Chaque membre dispose d'une voix et la règle de décision est la suivante: « *Les décisions [...] du Conseil de sécurité sont prises* *par un vote affirmatif de neuf de ses membres dans lequel sont comprises les voix de tous les membres permanents* ». (article 27, alinéa 3). La situation peut être représentée par un jeu (N, v) avec $N = M_1 \cup M_2$ (M_1 l'ensemble des membres permanents, M_2 celui des non-permanents), $v(S) = 1$ si $|S| \geq 9$ et $M_1 \subset S$, et $v(S) = 0$ sinon. On montre, en utilisant la notion de joueur pivot et l'indice de Shapley-Shubik, que $\varphi_i = 0,19627$ pour i dans M_1 et $\varphi_i = 0,001865$ pour i dans M_2. Cela signifie que le droit de veto détenu par un membre permanent lui confère un pouvoir de décision plus de 100 fois plus important que celui d'un membre non permanent ! Un autre contexte où l'indice de Shapley-Shubik a été largement utilisé concerne l'analyse du pouvoir de vote des différents pays au sein du *Conseil de l'UE*. En 1958, l'Allemagne, la France et l'Italie disposaient du même nombre de voix (quatre), les Pays-Bas comme la Belgique de deux voix et le Luxembourg d'une seule voix ; pour qu'une décision soit prise, douze voix étaient nécessaires. Il est facile de vérifier que le Luxembourg n'était jamais en mesure de rendre une coalition gagnante et constituait en conséquence un joueur *nul* (ou *dummy*). Paradoxalement, l'élargissement de l'Europe en 1973 s'est accompagné d'une augmentation du pouvoir de décision du Luxembourg.

4. Conclusion

La théorie des jeux coopératifs offre un cadre particulièrement cohérent pour analyser les situations où les joueurs ont de fortes incitations à coopérer. Elle propose des outils relativement simples à mettre en œuvre pour étudier et résoudre les problèmes de négociations, de partage ou de pouvoir. On peut dès lors s'étonner que la portion congrue lui soit réservée dans la plupart des manuels de théorie des jeux. Pourtant, comme l'a déclaré Robert Aumann dans une interview réalisée en 1998, "*cooperative game theory is doing actually quite well… and many of the most interesting applications of game theory come from the cooperative side*". Les auteurs de ce texte partagent le point de vue du prix Nobel d'économie 2005 et sont convaincus que les concepts de solution offerts par l'approche coopérative seront de plus en plus utilisés dans les années futures.

Bibliographie

[1] Axelrod R. *Donnant, donnant. Théorie du comportement coopératif*, Éditions Odile Jacob (1992)

[2] Dehez P. *Conflit, Marchandage, Partage et Pouvoir, une Introduction à la Théorie des Jeux*, perso.uclouvain.be/pierre.**dehez**/Documents/Manuscript.pdf (2007)

[3] Moulin H. *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press (1991)