Introduction à la Théorie des Jeux : les jeux non coopératifs

PAUL M., LEPELLEY D. ET SMAOUI H., CEMOI, UNIVERSITE DE LA REUNION[1],

SOMMAIRE[2]

[1] For corresponding, dominique.lepelley@univ-reunion.fr, michel.paul@univ-reunion.fr, hatem.smaoui@univ-reunion.fr.

[2] Ce texte est la « *version longue* » d'un article publié en novembre 2013 par *Ecoflash*, revue du CNDP.

I – Introduction

Construite dans la seconde partie du XXème siècle sur les contributions séminales de Von Neumann et Morgenstern (1944) et Nash (1951), la Théorie des Jeux (TDJ) étudie les situations *d'interaction stratégique* où le sort de chacun dépend non seulement de ses propres décisions mais aussi des décisions prises par les autres. Ce type de situations est très fréquent en économie (on pense bien sûr aux situations de concurrence imparfaite) mais aussi en sciences politiques (vote stratégique, compétition électorale…), en biologie (théorie de l'évolution) ou en sociologie (peer pressure, société de la confiance/défiance …). L'objet de la TDJ est de formaliser ces interactions pour tenter d'en prévoir l'issue (approche positive) mais aussi d'aider le ou les joueurs à choisir la « *bonne* » stratégie (approche normative).

Il est convenu de distinguer deux grandes familles de jeu : les jeux coopératifs dans lesquels les joueurs peuvent passer des accords qui les lient de manière contraignante et les jeux non coopératifs dans lesquels les joueurs sont entièrement libres de leurs décisions au moment où ils font leurs choix. L'objet de ce texte est de présenter brièvement les principaux types de jeux non coopératifs et les outils qui permettent de les analyser dans un contexte d'information complète où tous les aspects du jeu sont bien connus des décideurs. Les jeux coopératifs sont analysés quant-à-eux dans un second document.

II – Les différentes formes de jeu

On distingue en TDJ plusieurs catégories de jeux selon trois grands critères que sont (*i*) la capacité des joueurs à s'engager de façon formelle sur leurs décisions futures, (*ii*) la nature de l'information et (*iii*) le caractère statique ou dynamique du jeu. Cette classification est nécessaire car, selon le type de jeu auquel on fait face, on n'emploie pas (nécessairement) les mêmes outils pour le résoudre.

Le dernier critère est simple. Ainsi, on dira d'un jeu qu'il est dynamique si le déroulement du jeu procure de l'information à au moins un joueur ; dans le cas contraire, il est statique. Le premier critère renvoie aux deux grandes approches, coopératif *vs* non coopératif, autour desquelles s'est construite historiquement la TDJ. Pour l'essentiel, l'approche coopérative s'intéresse à la prise de décision collective, c'est-à-dire à des situations où l'on doit décider en commun de ce qu'il conviendra de faire. Il y a ainsi une phase de négociation avant le déroulement du jeu, cette dernière débouchant sur la signature d'un contrat exécutoire (i.e. qui a force de loi) et par lequel les joueurs s'engagent sur les actions qu'il conviendra de prendre au cours du jeu. L'approche non coopérative quant à elle s'attache à prévoir ce qui sera joué de manière spontanée par des joueurs entièrement libres de leurs décisions au moment où ils font leurs choix. Le point est qu'il peut alors y avoir ou non une phase de négociation avant le déroulement du jeu, en vue de se coordonner par exemple, mais si négociation il y a, les accords qui sont susceptibles d'être passés n'ont pas force de loi (par exemple, parce qu'ils seraient illégaux). A ce titre, les joueurs, s'ils honorent les engagements qu'ils auraient pu prendre durant cette phase de négociation, le font non pas parce qu'ils sont tenus de le faire mais bien parce que cela sert leurs intérêts.

Le critère touchant à la nature de l'information est le plus complexe. On distingue notamment (*i*) l'information parfaite *vs* imparfaite, (*ii*) l'information complète *vs* incomplète et (*iii*) l'information symétrique *vs* asymétrique selon le schéma suivant :

$$\textit{Information} \rightarrow \begin{cases} \textit{parfaite} \\ \textit{imparfaite} \rightarrow \begin{cases} \textit{complète} \\ \textit{incomplète} \rightarrow \begin{cases} \textit{symétrique} \\ \textit{asymétrique} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Schéma 1: les différents concepts d'information

De façon générique, la distinction entre information parfaite et imparfaite est simple. Ainsi, en information parfaite, « *on sait tout* » ou, plus exactement, « *on sait que l'on saura tout ce qu'il sera utile de savoir au moment où il faudra prendre une décision* ». En revanche, en information imparfaite, il y a au moins une chose pertinente pour la prise de décision que l'on ignore (toujours au moment où il faudra prendre une décision). Ainsi, des joueurs qui agissent à tour de rôle en observant à chaque fois ce qui a été joué par les autres, comme aux échecs par exemple, évoluent dans un contexte d'information parfaite. En revanche, s'ils le font sans savoir ce qui a été joué auparavant, comme dans une enchère scellée pour l'attribution d'un marché public par exemple, l'information est imparfaite.

Par la suite, il s'avère que cette première distinction n'est pas suffisante et il convient également de savoir, lorsque l'information est imparfaite, si les joueurs connaissent avec certitude les règles du jeu, ces dernières incluant l'ensemble des joueurs (qui joue ?), les ensembles d'actions possibles (que peuvent faire les joueurs ?) et les fonctions de règlements (combien obtiennent les joueurs ?). Si tel est le cas, l'information est complète ; dans le cas contraire, elle est incomplète et elle devient asymétrique si certains connaissent mieux les règles du jeu, le plus souvent les fonctions de règlement, que d'autres. On notera que l'information complète est une hypothèse forte dans certains contextes (comme dans les enchères par exemple car elle suppose que chacun connait les prix de réserve de tous) et raisonnable dans d'autres (comme aux échecs par exemple). D'autre part, les modèles d'agence, d'anti-sélection et de signaux, développés en Théorie des Contrats et grandement utilisés dans les domaines de l'économie du travail, de la finance d'entreprise, de l'assurance, de la fiscalité …, sont des jeux à information asymétrique.

III – Les jeux statiques

Les jeux statiques sont les jeux les plus simples que l'on peut rencontrer en TDJ. Ils décrivent des situations dans lesquelles chaque joueur joue une seule fois et ce sans connaître les choix des autres. De ce fait, les décisions sont prises dans un contexte d'information imparfaite ; les autres éléments nécessaires à la prise de décision sont, en revanche, supposés connus de tous.

A) La bi-matrice des règlements

Un jeu est défini du point de vue formel par la donnée de trois éléments que sont l'ensemble des joueurs $N = \{1, \dots, n\}$, les ensembles de stratégies S_1, …, S_n et les fonctions de règlement $u_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, ces dernières étant définies sur le produit cartésien des ensembles de stratégies $S = S_1 \times \dots \times S_n$ (qui constitue l'ensemble des résultats possibles du jeu) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ces différents éléments constituent ce que l'on appelle **la forme normale du jeu** $(N, S, (u_i)_{i \in N})$. Dans le cas à deux joueurs, ils peuvent être synthétisés de façon simple dans un tableau appelé **bi-matrice des règlements** (pour peu que les ensembles de stratégies contiennent un nombre fini d'éléments). Pour illustrer, considérons le jeu (1) dans lequel le joueur 1 joue en ligne et le joueur 2 en colonne (par convention). La situation décrite est celle de deux firmes qui se font concurrence par les prix. La première colonne liste les stratégies possibles du joueur 1, dans le cas présent vendre à *prix bas* ou à *prix élevé*, tandis que la première ligne décrit celles du joueur 2 (idem). Chaque cellule du tableau, en se situant à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, représente un résultat possible du jeu que l'on renseigne en faisant figurer les règlements obtenus pour la combinaison de stratégies considérée (le premier chiffre indique le profit de 1, le second celui de 2). Concrètement, la lecture du tableau indique que chaque firme obtiendra un profit de 40 si elles fixent toutes les deux un prix bas, que 1 obtiendra un profit de 100 et 2 un profit de 10 si 1 fixe un prix bas et 2 un prix élevé, etc.

	prix bas	*prix élevé*
prix bas	40,40	100,10
prix élevé	10,100	90,90

Bi-matrice 1 : le dilemme du Prisonnier

Par la suite, le problème consiste à savoir ce que les joueurs vont jouer, ici les niveaux de prix qu'ils vont sélectionner, dans un contexte où, si chacun connaît toutes les données du jeu (hypothèse d'information complète), on n'observe pas ce que l'autre est en train de faire (l'information est donc imparfaite). Qui plus est, s'il est possible de discuter avant le déroulement du jeu, chacun reste entièrement libre de sa décision au moment où il fait son choix (approche non coopérative).

B) Résolution par des relations de dominance

L'équilibre en stratégies strictement dominantes La résolution du jeu (1) est particulièrement simple car chaque joueur a une stratégie qui est objectivement la meilleure. En effet, quoi que fasse le joueur 2, 1 a toujours intérêt à jouer *prix bas* car cette stratégie permet de meilleurs règlements (soit 40 avec $40 > 10$ dans l'éventualité où 2 jouerait *prix bas* ou 100 avec $100 > 90$ dans l'éventualité où 2 jouerait *prix élevé*). Similairement, quoi que fasse le joueur 1, 2 a toujours intérêt à jouer *prix bas* car, dans tous les cas de figure, son règlement est meilleur comparé à celui que permet son autre stratégie (soit 40 ou 100 contre 10 ou 90, selon que 1 joue *prix bas* ou *prix élevé*). Dans ces conditions, les stratégies optimales sont bien définies et le résultat du jeu (ou équilibre) est directement constitué du couple de stratégies $(s_1^*, s_2^*) = (prix\ bas, prix\ bas)$ avec des règlements d'équilibre qui sont alors donnés par $(u_1^*, u_2^*) = (40{,}40)$.

Le jeu (1) est plus connu dans la littérature sous le terme de **dilemme du Prisonnier**. Sa structure particulière fait qu'on peut le résoudre en appliquant ce concept de solution fort qu'est l'équilibre en stratégies strictement dominantes et qui requiert que chacun dispose d'une stratégie qui fasse mieux à tous les coups. Ces problèmes de décision dans lesquels les interactions stratégiques sont, de fait, réduites à leur plus simple expression[3] peuvent apparaître d'un intérêt limité. Pour autant, le dilemme du Prisonnier est d'une grande portée car il montre que la poursuite de leurs intérêts par les agents peut conduire à un résultat qui n'est pas optimal du point de vue collectif. Ainsi, quand bien même le caractère optimal des décisions individuelles ne souffre d'aucune discussion, il s'avère que les joueurs jouent le seul résultat qui ne soit pas un optimum de Pareto (en particulier, chacun verrait son règlement s'améliorer, de 40 à 90, s'ils jouaient $(prix\ élevé, prix\ élevé)$). Ce jeu est alors souvent mis en avant pour rendre compte de situations où la coopération mutuelle est bénéfique mais où chacun est incité à dévier de l'optimum collectif, ce qui est socialement sous optimal dès lors que tout le monde agit de la sorte. De fait, de nombreuses situations économiques obéissent à de telles logiques. Tel est notamment le cas des cartels, des négociations sur l'emploi lorsqu'elles ne sont pas obligatoires, de la surexploitation des ressources naturelles, du financement des biens publics (comportements dits du passager clandestin) … .

L'équilibre par élimination de stratégies strictement dominées Une des limites de l'équilibre en stratégies strictement dominantes est qu'il n'existe pas pour une large classe de jeux. Un second concept de solution, moins restrictif, est celui de l'équilibre par élimination itérée de stratégies strictement dominées. Pour illustrer, considérons le jeu (2) ci-dessous dans lequel aucun joueur ne dispose de stratégie qui lui permette de faire mieux à tous les coups.

	x	*y*	*z*
a	1,0	1,2	0,1
b	0,3	0,1	2,0

Bi-matrice 2

[3] Dans de telles situations, se préoccuper de ce que font les autres est inutile.

L'examen des fonctions de règlement montre alors que le joueur 2 ne jouera jamais *z* car cette stratégie est strictement dominée par *y* (quoi que fasse le joueur 1, jouer *y* permet au joueur 2 d’obtenir de meilleurs règlements). Par la suite et dans la mesure où il est inconcevable qu'un joueur rationnel[4], entendant maximiser son règlement, joue une stratégie strictement dominée, la stratégie *z* apparaît comme une option non pertinente pour le problème de décision du joueur 2 auquel cas il est possible de l'éliminer. On aboutit ainsi à un jeu simplifié (voir schéma 2) dont on peut considérer qu'il est logiquement équivalent au premier … et dans lequel la stratégie *b* du joueur 1 est devenue strictement dominée (conditionnellement donc à l'élimination de la stratégie *z* du joueur 2). Il y a donc là aussi possibilité d'éliminer cette stratégie (i.e. on répète le processus) pour aboutir à un nouveau jeu réduit, logiquement équivalent au précédent … et dans lequel il apparait que 2 ne jouera jamais *x* (car *x* est devenu dominé par *y*). On converge ainsi vers un unique résultat : le profil (a, y). Le « *chairman’sparadox* » qui est un classique de la théorie du vote peut également être résolu grâce à ce principe d’élimination de stratégies dominées (mais non strictement ; voir 6-1).

	x	*y*	*z*
a	1,0	1,2	0,1
b	0,3	0,1	2,0

→

	x	*y*
a	1,0	1,2
b	0,3	0,1

→

	x	*y*
a	1,0	1,2

→

	y
a	1,2

Schéma 2 : équilibre par élimination itérée de stratégies strictement dominées

On notera que ce mode de résolution, s'il peut sembler relativement naturel, peut aussi requérir des raisonnements assez sophistiqués de la part des joueurs. Ainsi, avec la résolution du jeu 2, on a implicitement supposé (*i*) non seulement que 1 et 2 étaient rationnels mais aussi (*ii*) que 1 savait que 2 était rationnel (dans le cas contraire, si 1 ne sait pas que 2 est rationnel, il n'est pas possible d'éliminer la stratégie *b*) et (*iii*) que 2 savait que 1 savait que 2 était rationnel (si 2 ne sait pas que 1 sait que 2 est rationnel, 2 ne peut pas anticiper que 1 ne jouera jamais *b* auquel cas il peut être optimal de jouer *x*). Une difficulté avec cette hypothèse dite de **connaissance mutuelle** est qu'elle est d'autant plus exigeante que le nombre d'itérations est grand. D’autre part, un second problème est que le processus peut ne pas converger vers un unique résultat. En particulier, nombreux sont les jeux dans lesquels aucune stratégie n'est strictement dominée (voir par exemple le jeu (3) donné plus loin) auquel cas tous les résultats

[4]Suivant Osborne et Rubinstein (1994), page 4, un décideur est considéré comme rationnel si « he is aware of his alternatives, forms expectations about any unknown, has clear preferences, and chooses his action deliberately after some process of optimization ».

du jeu apparaissent comme des issues possibles pour ce concept d'équilibre (en d'autres termes, tout peut arriver). De ce point de vue, l'équilibre de Nash qui est utilisé de façon quasi-systématique dans les applications est un concept nettement plus satisfaisant.

C) L'équilibre de Nash

1) Définition et détermination

Définition A l'origine, **un équilibre de Nash** est défini comme un résultat du jeu en lequel la stratégie de chacun, compte tenu de ce que fait l'autre, est optimale. En d'autres termes, en un tel profil, personne n'est incité à s'écarter de sa stratégie si l'autre en fait autant, ou bien encore et de façon équivalente, personne ne regrette ce qu'il a joué compte tenu de ce qu'a joué l'autre.

Détermination La détermination des équilibres de Nash d'un jeu peut se faire de deux façons. La première, appliquant la définition, consiste à vérifier qu'aucun joueur n'a intérêt à changer unilatéralement de stratégies au profil considéré. Ce dernier sera alors en équilibre si la déviation n'est pas rentable (strictement) pour qui que ce soit et ne le sera pas dans le cas contraire (dans ce cas de figure, un joueur au moins peut faire mieux en jouant autre chose que la stratégie qui lui est prêtée). Ainsi, par exemple, le profil (b, x) du jeu 2 n'est pas en équilibre de Nash car le joueur 1 n'a pas intérêt à jouer b mais a lorsque 2 joue x (en ce profil, la déviation est donc rentable pour au moins un joueur). A contrario, le profil (a, y) forme lui un équilibre de Nash car (*i*) il est effectivement optimal pour 1 de jouer a lorsque 2 joue y et, réciproquement, (*ii*) sachant que 1 joue a, il est effectivement optimal pour 2 de jouer y. Le profil (a, y) constitue donc à la fois un équilibre par élimination itérée de stratégies strictement dominées et un équilibre de Nash, ce qui constitue un résultat attendu. On montre en effet que si un jeu admet un unique équilibre par élimination itérée de stratégies dominées, alors il admet aussi un unique équilibre de Nash qui coïncide avec le premier[5].

[5]D'autres propriétés intéressantes sont (*i*) le fait qu'un joueur possédant une stratégie strictement dominante la joue à l'équilibre de Nash, (*ii*) le fait que les équilibres de Nash sont également des équilibres par élimination itérée de stratégies strictement dominées et (*iii*) le fait que la réciproque soit fausse, i.e. des équilibres par élimination itérée de stratégies strictement dominées ne sont pas nécessairement en équilibre de Nash. Ces deux dernières propriétés montrent que l'équilibre de Nash est un concept d'équilibre plus restrictif que l'équilibre par élimination itérée de stratégies strictement dominées, plus restrictif au sens où les conditions qu'il demande pour qu'un profil puisse être considéré comme un résultat d'équilibre sont plus fortes.

L’intérêt de cette première méthode est qu’elle est simple et rapide à mettre en œuvre dès lors que l’on souhaite vérifier que tel profil est (ou n’est pas) en équilibre de Nash (*cf.* le calcul des équilibres de Nash dans le « *chairman’sparadox* » pour une illustration). Vis-à-vis d’une caractérisation complète du jeu, elle ne semble toutefois pas a priori bien adaptée dans la mesure où il convient de faire passer ce test à tous les profils[6]. On peut néanmoins procéder à la détermination des équilibres de Nash en faisant usage d’une autre méthode, couramment utilisée dans la pratique, et qui requiert de calculer **les fonctions de meilleures réponses** des joueurs.

Par définition, une fonction de meilleure réponse précise, pour chaque stratégie que l'autre joueur est susceptible de jouer, la ou les stratégies que l'on a intérêt à adopter[7]. Ainsi, pour le jeu (3) donné ci-dessous :

	α	β	δ
a	$\underset{+}{10}, 7$	$4, 2$	$8, \underset{+}{8}$
b	$6, 3$	$\underset{+}{5}, \underset{+}{5}$	$\underset{+}{9}, 2$

Bi-matrice 3 : calcul de l’équilibre de Nash par les meilleures réponses

on voit que 1 aura intérêt à jouer a si 2 joue α (car $10 > 6$), b si 2 joue β (car $5 > 4$) et de nouveau b si 2 joue δ (car $9 > 8$). Cette fonction, définie sur l'ensemble de stratégies du joueur 2 et à valeurs dans l'ensemble de stratégies du joueur 1, constitue la meilleure réponse du joueur 1. On la représente dans la bi-matrice en marquant dans chaque colonne, c'est-à-dire pour chaque stratégie du joueur 2, le règlement maximal du joueur 1 (chaque croix permet donc de repérer la stratégie qu'il est optimal pour 1 de jouer face à la stratégie du joueur 2 qui est considérée). Similairement et en s'intéressant à présent au joueur 2, ce dernier aura intérêt à jouer δ si 1 joue a (car $u_2(a, \delta) = 8 > u_2(a, \alpha) = 7 > u_2(a, \beta) = 2$) et β si 1 joue b (car $u_2(b, \beta) = 5 > u_2(b, \alpha) = 3 > u_2(b, \delta) = 2$)). Cette règle, jouer α si 1 joue a et βsi 1 joue b, constitue la meilleure réponse du joueur 2 ; on la représente dans la bi-matrice en marquant d'une croix les règlements afférents (techniquement, on identifie donc dans chaque ligne le

[6] Il existe une littérature très riche traitant du problème du temps de calcul que peut requérir la détermination d’un équilibre de Nash (en général et pour des familles particulières de jeux non coopératifs) ; voir par exemple McKelvey et McLennan (1996), Fabrikant *et al.* (2004) et Daskalakis *et al.* (2009).
[7] Mathématiquement, lorsque plusieurs stratégies sont en meilleure réponse, cette fonction prend la forme d’une correspondance.

règlement maximal du joueur 2). Pour finir, un équilibre de Nash étant un profil en lequel les stratégies sont en meilleures réponses les unes aux autres, ne reste plus qu'à repérer **l'intersection des meilleures réponses** en localisant la cellule où il figure deux croix (ce qui témoigne de l'optimalité croisée des stratégies). Dans le cas présent, cela se réalise au profil (b, β).

Nash (1950) a établi que l'existence de l'équilibre qui porte son nom est garantie pour une large classe de problèmes dès lors que l'on autorise les joueurs à jouer, le cas échéant, de manière aléatoire (notion de stratégies mixtes ; voir le b) du paragraphe 3). L'une des applications les plus classiques de l'équilibre de Nash concerne l'analyse des situations de duopole (voir 6-2).

2) Justification

Ce formalisme étant posé, reste à savoir maintenant pourquoi les joueurs, mis en situation, joueraient l'équilibre de Nash. La réponse à cette question n'est pas évidente car, comme le souligne Cahuc (1998), « *le concept de l'équilibre de Nash ne nous dit pas comment les joueurs aboutissent au choix de leurs stratégies d'équilibre* » (au contraire de l'équilibre par élimination itérée de stratégies strictement dominées par exemple). Pour ce faire, on dispose toutefois de plusieurs arguments relativement satisfaisants.

Le premier consiste à exploiter l'aspect **point fixe** de l'équilibre de Nash (i.e. le fait que « *si on y est, on y reste* » car, par définition, personne n'est incité à changer de stratégies en un tel profil) pour l'interpréter comme **l'équilibre de long terme d'un processus d'ajustement** (qu'il reste à préciser). Un intérêt de cette interprétation est de mettre l'accent sur les processus d'apprentissage qui sont développés par les joueurs dans un contexte de rationalité limitée (et qu'il convient de ne pas sous-estimer). A ce titre, elle est souvent avancée en théorie des jeux évolutionnistes où les joueurs peuvent agir de façon très mécanique[8]. Une difficulté toutefois est que la nature du processus joue, rien ne garantissant en toute généralité que l'on converge

[8]Pour être plus précis, on peut supposer par exemple que les joueurs jouent à tour de rôle et sélectionnent de façon myope, après avoir observé ce qui vient d'être joué par l'autre joueur, une stratégie leur permettant de maximiser leur règlement courant. Sous ces hypothèses et partant du point initial (a, α), on obtient lorsque 2 joue en premier la séquence $(a, \alpha) \rightarrow (a, \delta) \rightarrow (b, \delta) \rightarrow (b, \beta) \rightarrow (b, \beta) \cdots$. Cette dernière converge alors vers (b, β) et, très naturellement, réplique ce profil à compter du moment où il a été atteint. De ce point de vue, l'équilibre de Nash apparaît bien comme le profil de stratégies qui sera joué à terme par ce type de joueurs.

bien vers ce qui constitue le point fixe du processus (voir annexe pour un exemple). Dans de tels cas de figure, le concept de l'équilibre de Nash perd beaucoup de son intérêt.

Le second argument, plus méthodologique, consiste à regarder l'équilibre de Nash comme **un critère minimal de prédictibilité**. Ainsi, toute théorie, parce qu'elle doit déboucher sur une prédiction quant à l'issue du jeu, se doit de prédire un profil qui est en équilibre de Nash car il faut que les joueurs soient prêts à le jouer. Dans le cas contraire en effet, i.e. si la théorie fait une prédiction qui n'est pas en équilibre de Nash, un joueur au moins peut faire mieux en jouant autre chose que ce que la théorie prédit et il y a alors toutes les chances pour que la théorie soit infirmée (et donc rejetée).

Pour finir, le dernier argument consiste à regarder l'équilibre de Nash comme **un équilibre à anticipations rationnelles avec des prophéties** (i.e. des prévisions) **auto-réalisatrices**. Reprenant le jeu (3), l'idée de façon informelle est la suivante. Dans un premier temps, on fait l'hypothèse (*i*) que 1 pense que 2 va jouer β et (*ii*) que 2 pense que 1 va jouer *b*. Par la suite, si ces anticipations qui sont tenues pour certaines (on parle de croyances) sont à ce stade du raisonnement totalement *ad hoc*, le point est que si 1 pense que 2 va jouer β, il a intérêt à jouer *b* et si 2 pense que 1 va jouer *b*, il a intérêt à jouer β. En conséquence, au profil (b, β), (*i*) le joueur 1 en jouant *b* confirme l'anticipation de 2 et le bien-fondé pour 2 de jouer β et (*ii*) le joueur 2 en jouant βconfirme l'anticipation de 1 et le bien-fondé pour 1 de jouer *b*. Sous cette forme, un équilibre de Nash apparaît donc bien comme **un équilibre en stratégies**, il est effectivement optimal pour les joueurs de jouer les stratégies qu'ils sont censés jouer, **avec des anticipations qui sont correctes**, i.e. chacun a bien prévu le comportement de l'autre.

Pour conclure, il est important de noter que tous les profils ne passent pas ce test de cohérence. Ainsi, au résultat (b, δ) par exemple, s'il est effectivement optimal pour 1 de jouer *b* s'il anticipe que 2 joue δ, le fait de jouer δ pour le joueur 2 se justifie uniquement par l'anticipation selon laquelle 1 joue *a*. De ce fait, le profil (a, δ) est rationalisable mais sur la base d'une erreur d'anticipation chez le joueur 2, ce qui lui confère un intérêt limité du point de vue théorique (il est en effet plus satisfaisant de construire une théorie du choix en considérant que les joueurs ne se trompent pas, au moins à terme).

3) Existence et multiplicité des équilibres de Nash

a) La question de la multiplicité : le rôle des conventions

La bataille des sexes de Luce et Raiffa (1957) est un jeu qui illustre les problèmes que pose la multiplicité des équilibres de Nash. Les situations dont il rend compte font souvent jour en Economie Industrielle avec la question de l'adoption des normes techniques notamment (chaque firme gagnerait à ce qu'un standard unique émerge sur le marché et chaque firme gagnerait encore plus à ce que ce soit le propre standard qu'elle a développé qui soit adopté). L'histoire est (précisément) la suivante. Deux personnes, John et Mary, ont sympathisé au cours d'un voyage en avion. Ils souhaitent se revoir mais leur timidité les a dissuadés de se demander leur numéro de téléphone. Compte tenu des propos échangés, ils savent toutefois (*i*) que John doit se rendre à un match de boxe ce soir et (*ii*) que Mary doit aller à l'opéra le même soir. Chacun dispose ainsi de deux stratégies, se rendre au match de boxe ou se rendre à l'opéra, pour pouvoir se revoir. Une difficulté toutefois est que chacun a également une petite préférence qui lui est propre s'agissant de l'endroit où, dans l'idéal, les retrouvailles devraient se faire (en l'occurrence au match de boxe pour John, à l'opéra pour Mary). D'autre part, chacun souhaiterait également éviter la situation dans laquelle John se rendrait à l'opéra tandis que Mary irait au match de boxe. Dans ce cas de figure en effet, les joueurs ne se revoient pas et assistent à une manifestation qui n'a pas leur préférence.

Une bi-matrice des règlements représentative de ce jeu, avec John qui joue en ligne et Mary en colonne, est donnée par le tableau (4). Le calcul des meilleures réponses établit alors que ce jeu admet deux équilibres de Nash que sont (*opéra*, *opéra*) et (*boxe*, *boxe*). Dans la mesure où le premier équilibre a la préférence de Mary et le second celle de John, se pose la question de savoir si les joueurs vont parvenir à se coordonner sur un équilibre et, si oui, sur lequel.

	opéra	*boxe*
opéra	$\underset{+}{2},\underset{+}{3}$	$0,0$
boxe	$1,1$	$\underset{+}{3},\underset{+}{2}$

Bi-matrice 4 : la bataille des Sexes (Luce et Raiffa, 1957)

Ce problème de la sélection d'un équilibre par les joueurs se résout en regardant si un équilibre se différencie des autres. Si tel est le cas, chaque joueur dispose d'un moyen pour distinguer cet équilibre et, surtout, chacun sait que l'autre dispose aussi de ce moyen, ce qui peut permettre de se coordonner. Les critères que l'on peut utiliser sont très divers. Ils peuvent notamment être objectifs, on parle alors de **critère de raffinement**, ou subjectifs, on parle alors de **point focal** (Schelling, 1960). Ainsi, pour le jeu suivant :

	oui	*non*
oui	$\underset{+}{2}, \underset{+}{2}$	$0, 0$
non	$0, 0$	$\underset{+}{1}, \underset{+}{1}$

Bi-matrice 5 : équilibre de Nash et Pareto optimalité comme critère de raffinement

il semble raisonnable de considérer que les joueurs vont jouer l'équilibre de Nash (oui, oui) qui domine au sens de Pareto l'équilibre (non, non). De fait, 100% de nos étudiants à qui nous avons soumis l'expérience joue effectivement ce profil[9]. Similairement, les expériences menées par Cooper et al (1993) et Rubinstein (1999) montrent que, invités à jouer à la Bataille des Sexes, 60 à 80 % des sujets jouent (*opéra*, *opéra*). De ce fait, cet équilibre parce qu'il est joué de façon fréquente constitue aux yeux des joueurs un point focal. Cette tendance peut s'expliquer par le rôle joué par **les conventions** que l'on peut regarder comme **un moyen de se coordonner sur un équilibre de Nash**. Bien évidemment, les joueurs ne sont pas (nécessairement) indifférents au choix de la convention mais le grand apport de la TDJ est de montrer que, si convention il y a, c'est nécessairement un équilibre de Nash car les agents doivent avoir intérêt à la respecter. L'exemple traditionnellement donné est celui du code de la route. Ainsi, sur une route de montagne où deux conducteurs doivent se croiser dans un virage, *rouler sur sa droite* sont deux stratégies qui sont en équilibre de Nash … de même que *rouler sur sa gauche* (si l'un des conducteurs roule sur sa gauche, l'autre a également intérêt à ne pas respecter la convention et à rouler sur sa gauche de façon à éviter la collision). De ce point de vue, le code de la route est une convention qui permet aux joueurs de se coordonner sur un équilibre de Nash.

[9]Ce critère n'est toutefois pas suffisant. Ainsi, lorsque le règlement du joueur 1 passe de 0 à -1000 lorsque 1 joue oui et 2 joue non, les autres règlements restant inchangés, il s'avère qu'une large majorité d'étudiants jouent l'équilibre de Nash (non, non). Par la suite, si l'on comprend bien pourquoi le joueur 1, désireux de limiter le risque, joue non, le point remarquable est qu'il en va de même pour le joueur 2 qui anticipe dès lors assez bien cette modification du comportement du joueur 1.

b) La question de l'existence : les stratégies mixtes

Le matching pennies Le matching pennies est un jeu à information imparfaite dans lequel deux joueurs, 1 et 2, doivent dévoiler le côté de leur pièce. Si chacun montre le même côté, le joueur 1 gagne la pièce du joueur 2 et il perd la sienne dans le cas contraire. Le tableau 6 donne la bi-matrice des règlements de ce jeu dont l'équivalent français est Pierre, Feuille, Ciseaux[10] et dont le calcul des meilleures réponses montre qu'il n'admet pas d'équilibre de Nash : quel que soit le profil considéré, un joueur a en effet toujours intérêt à changer de stratégie par rapport à celle qui lui est prêtée (par exemple, au profil $(Pile, Pile)$, le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer *Pile* mais *Face*). Comme le souligne Gibbons (1992), une caractéristique du matching pennies est que chacun aimerait induire l'autre en erreur car gagner requiert que l'autre se trompe sur ce que l'on va faire (on se remémorera qu'un équilibre de Nash est un équilibre en stratégies avec des anticipations qui sont correctes), une propriété qui fait également jour au poker, au football avec l'exercice des pénaltys ou bien encore dans les batailles militaires. Dans de telles situations, clairement, aucun résultat $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ne peut être en équilibre de Nash. Il est toutefois possible de construire un équilibre mais à condition de permettre aux joueurs d'utiliser des stratégies mixtes, c'est-à-dire de jouer de manière aléatoire.

	$Pile$	$Face$
$Pile$	$\underset{+}{1}, -1$	$-1, \underset{+}{1}$
$Face$	$-1, \underset{+}{1}$	$\underset{+}{1}, -1$

Bi-matrice 6

Le prolongement mixte du jeu Formellement, une stratégie mixte est une distribution de probabilités, éventuellement dégénérée, sur les stratégies $s_i \in S_i$ du joueur i (ce dernier est donc supposé jouer au hasard). Dans le cadre du matching pennies où $S_1 = S_2 = \{Pile, Face\}$, elles s'écrivent de façon formelle $\sigma_1 = (p, 1-p)$ et $\sigma_2 = (q, 1-q)$ avec p (resp. q) la probabilité que le joueur 1 (resp. le joueur 2) joue *Pile*. Dans ce cadre, les ensembles de stratégies des joueurs sont constitués de toutes les lois de probabilité $S_1 =$

[10] Les amateurs ne manqueront pas de consulter l'article d'Erwan Le Duc, « *Pierre, feuille ou ciseaux, là est la question* », Le Monde, édition du 06/11/09.

$\{(p, 1-p) \in \mathbb{R}^2 | p \in [0,1]\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{(q, 1-q) \in \mathbb{R}^2 | q \in [0,1]\}$ et le produit cartésien $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ donne l'ensemble de toutes les loteries :

$$\mathfrak{L}(p,q) = \begin{cases} (Pile, Pile) & (Pile, Face) & (Face, Pile) & (Face, Face) \\ pq & p(1-q) & (1-p)q & (1-p)(1-q) \end{cases}$$

qui sont ainsi constituées[11]. Graphiquement, ces loteries peuvent être représentées dans le plan (p, q) par un carré de longueur 1 (voir la figure 1).

Par la suite, il convient pour compléter la description du jeu de calculer les règlements $V_1(\sigma_1, \sigma_2)$ et $V_2(\sigma_1, \sigma_2)$ dont bénéficient les joueurs lorsqu'ils font usage de telles stratégies. Dans ce contexte, le point est alors que, les joueurs jouant de manière aléatoire, il en va de même pour le résultat du jeu et, ce faisant, pour les règlements des joueurs. *Ex ante*, on a ainsi et précisément :

$$\tilde{u}_1 = \begin{cases} u_1(Pile, Pile) = 1 & u_1(Pile, Face) = -1 & u_1(Face, Pile) = -1 & u_1(Face, Face) = 1 \\ pq & p(1-q) & (1-p)q & (1-p)(1-q) \end{cases}$$

$$\tilde{u}_2 = \begin{cases} u_2(Pile, Pile) = -1 & u_2(Pile, Face) = 1 & u_2(Face, Pile) = 1 & u_2(Face, Face) = -1 \\ pq & p(1-q) & (1-p)q & (1-p)(1-q) \end{cases}$$

Par la suite, sous l'hypothèse de neutralité à l'égard du risque, les préférences des joueurs sur les loteries peuvent être représentées par le critère du gain espéré[12]. On a alors en ce qui concerne la fonction d'utilité du joueur 1 :

$$\begin{aligned} E\,[\tilde{u}_1] &= [p(1-q) + (1-p)q] \times (-1) + [pq + (1-p)(1-q)] \times 1 \\ &= 4pq - 2p - 2q + 1 \\ &= V_1(p,q) \end{aligned}$$

[11] La construction de ces loteries se fait sous une hypothèse d'indépendance (on dit aussi que les stratégies mixtes σ_1 et $\sigma_2$ne sont pas corrélées).

[12] Pour une présentation claire et complète de la théorie de la décision en situation d'incertitude et ses applications, le lecteur intéressé pourra se référer à Cayatte (2004).

et similairement pour le joueur 2 :

$$\begin{aligned}
E\,[\tilde{u}_2] &= pq \times (-1) + p(1-q) \times 1 + (1-p)q \times 1 + (1-p)(1-q) \times (-1) \\
&= 2p + 2q - 4pq - 1 \\
&= V_2(p,q)
\end{aligned}$$

La structure $\{N, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1, V_1(\cdot), V_2(\cdot)\}$ ainsi construite constitue alors le prolongement mixte du jeu initial $\{N, S_1, S_2, u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$.

Calcul de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes Le calcul de l'équilibre de Nash dans cette forme normale étendue est similaire à celui qui s'applique en stratégies pures. Dans un premier temps, il s'agit de déterminer pour le joueur 1 une meilleure réponse mais en stratégies mixtes en résolvant le programme :

$$\max_{p \in [0,1]} V_1(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1$$

(les deux contraintes $0 \leq p \leq 1$ car p est une probabilité). Par la suite, la dérivée $\partial V_1 / \partial p$ étant égale à $4q - 2$, la fonction $V_1(\cdot, q)$ est croissante (strictement) en p lorsque $q > 1/2$, décroissante (strictement) lorsque $q < 1/2$ et prend une valeur constante en $V_1(p, 1/2) = 0$ lorsque $q = 1/2$. Dans ces conditions, la meilleure réponse du joueur 1, notée $p^*(q)$, s'écrit[13] :

$$p^*(q) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq q < 1/2 \\ [0,1] & si \quad q = 1/2 \\ 1 & si \quad 1/2 < q \leq 1 \end{cases}$$

On notera que cette meilleure réponse en prenant la forme d'**une fonction à seuil** rend compte d'un comportement simple. Elle énonce en effet que le joueur 1 jouera *Pile* s'il y a « *beaucoup de chances* » pour que 2 joue *Pile*, « *beaucoup de chances* » au sens où la probabilité q en étant supérieure à 1/2 est forte, et *Face* dans le cas contraire. Par ailleurs,

[13] La notation $p^*(q) = [0,1]$ se lit comme « *une valeur quelconque mais positive et inférieure à l'unité* ».

lorsque la probabilité q est précisément égale à 1/2, toutes les stratégies mixtes $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ sont en meilleures réponses dont, en particulier, les stratégies mixtes dégénérées $\sigma_1 = (1,0)$ et $\sigma_1' = (0,1)$ qui font jouer au joueur 1 les stratégies pures $s_1 = Pile$ et $s_1' = Face$ avec certitude[14].

La fonction de règlement $V_2(p, q)$ étant de la même façon linéaire en q avec $\partial V_2/\partial q = 2 - 4p$, la meilleure réponse du joueur 2 en stratégies mixtes est donnée par :

$$q^*(p) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq p < 1/2 \\ [0,1] & si \quad p = 1/2 \\ 0 & si \quad 1/2 < p \leq 1 \end{cases}$$

La représentation graphique de $p^*(q)$ et $q^*(p)$ dans le plan (p, q) (*cf*. fig. 1) montre alors que ces deux meilleures réponses se coupent au point $(p, q) = (1/2, 1/2)$, ce qui correspond à l'équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu. A l'équilibre, chaque joueur joue donc pile avec une probabilité de 1/2 et face avec la probabilité complémentaire (soit encore 1/2).

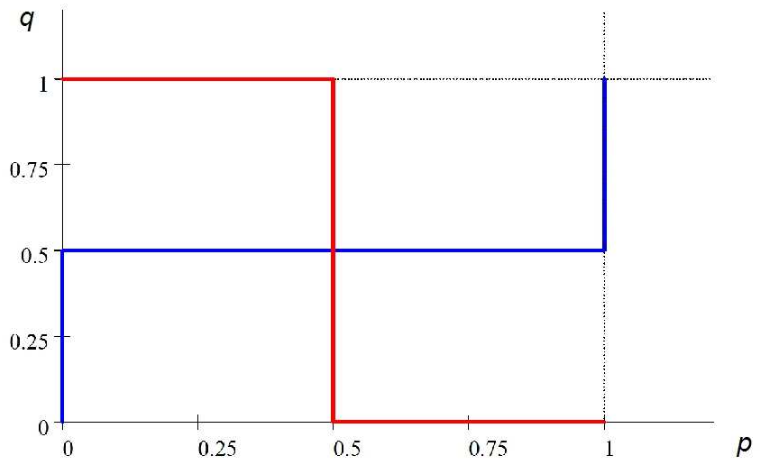


Figure 1 : détermination de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes – le matching pennies

[14]Le joueur 1 étant indifférent entre les deux stratégies pures *pile* et *face* lorsque $q = 0.5$, on a $V_1(1{,}0.5) = V_1(0{,}0.5)$ et de façon plus générale $\lambda V_1(1{,}0.5) + (1 - \lambda)V_1(0{,}0.5) = V_1(1{,}0.5) = V_1(0{,}0.5)$, $\forall \lambda \in [0,1]$. De ce fait, le joueur 1 est bien indifférent entre toutes ses stratégies mixtes $\sigma_1 = (\lambda, 1 - \lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, lorsque $q = 1/2$. Comme apparent, cette propriété tient à ce que les fonctions d'utilité des joueurs sont linéaires en probabilité. A ce titre, le fait que les fonctions de réactions soient des fonctions à seuil ne découlent pas de l'hypothèse de neutralité face au risque mais, plus généralement, de l'axiomatique VNM.

Commentaires L'un des grands intérêts des stratégies mixtes réside dans le théorème d'existence de Nash (1950) qui énonce que tout jeu fini[15] admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Certains économistes, peu convaincus par l'idée que les joueurs puissent jouer de manière aléatoire, expriment parfois une certaine réticence face à l'intérêt de ce théorème mais l'on ne perd rien à adopter une telle approche. En effet et comme souligné à plusieurs reprises dans le texte, figurent parmi les stratégies mixtes $\sigma_1 = (p, 1-p)$ du joueur 1 (*mutatis mutandis* du joueur 2) les stratégies mixtes dégénérées $\sigma_1 = (1{,}0)$ et $\sigma_1' = (0{,}1)$ qui décrivent des situations dans lesquelles le joueur 1 joue les stratégies pures *Pile* et *Face*. En procédant de la sorte, on ne fait donc qu'étendre les ensembles de stratégies des joueurs et l'on ne voit alors pas pourquoi des décideurs ne pourraient pas jouer de manière aléatoire si jamais ils considéraient qu'il était optimal de le faire. D'autre part, un second argument est qu'un équilibre en stratégies mixtes reçoit différentes interprétations (*cf.* en particulier Osborne et Rubinstein (1994), pp. 37-44) qui peuvent alors lui conférer un caractère très convaincant selon le contexte. Dans le cas du matching pennies, on peut notamment le regarder comme déterminant la fréquence avec laquelle un joueur doit faire usage de telle ou telle stratégie dans un cadre répété où l'on joue à plusieurs reprises à ce jeu, avec des décideurs qui s'attachent à estimer sur la base des coups précédents ce que fait l'autre. Dans un tel contexte, on conçoit alors qu'un joueur qui jouerait *Pile* à tous les coups ou, de façon moins excessive, 3 fois sur 4, adopterait un comportement qui a clairement toutes les chances d'être perdant à terme, cela au même titre qu'un footballeur qui tirerait toujours un pénalty sur sa droite ou un joueur de poker qui miserait uniquement lorsqu'il a du jeu. Le jeu de l'inspection que l'on présente en 6-3 constitue une application économique classique des stratégies mixtes.

IV – Les jeux dynamiques : résolution par la récurrence à rebours

Par définition, un jeu est dynamique lorsque son déroulement procure de l'information à au moins un joueur. Ce type de jeu peut être résolu de façon satisfaisante au moyen de l'équilibre de Nash à condition de l'accompagner d'une condition supplémentaire dénommée « *critère de perfection* » (on parle précisément d'équilibre de Nash parfait en sous-jeux). Toutefois, d'un strict point de vue opérationnel, cette façon de faire est véritablement utile uniquement dans

[15] Un jeu fini est un jeu dans lequel les ensembles de stratégies des joueurs contiennent un nombre fini d'éléments.

les jeux infiniment répétés qui présentent la particularité de ne pas avoir de fin (ou dont la date de fin n'est pas connue avec certitude). Pour les jeux restants, la pratique consiste à résoudre en utilisant **l'équilibre parfait** qui est simple à mettre en œuvre.

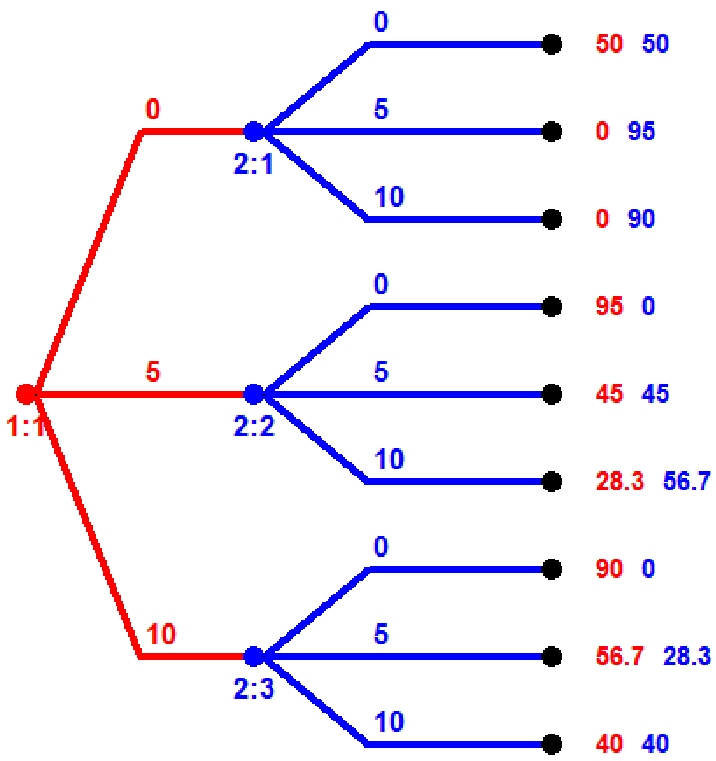
A) ... lorsque l'information est parfaite

Les jeux dynamiques à information parfaite présentent deux grandes caractéristiques : (*i*) ce sont des jeux séquentiels où les joueurs jouent à tour de rôle, dans un ordre prédéterminé, et (*ii*) au moment de prendre sa décision, chacun sait ce qui a été joué auparavant (on dit aussi que les joueurs, au moment où ils ont la main, connaissent l'histoire du jeu). L'arbre n°1 qui décrit une version simplifiée de « *la bataille publicitaire* » en fournit un exemple. La situation considérée est celle d'un marché sur lequel deux firmes se livrent à une concurrence hors prix pour attirer les consommateurs (le prix, en étant fixé de manière discrétionnaire par les autorités publiques par exemple, n'est donc pas une variable de décision). Dans un premier temps, on suppose qu'un joueur, ici la firme 1, doit décider de son budget publicitaire sachant que trois enveloppes, 0, 5 ou 10, sont possibles. Ce choix arrêté, un second joueur, la firme 2, prend la main et décide à son tour de son investissement publicitaire toujours parmi les trois valeurs possibles 0, 5 ou 10. A la dernière étape, les profits qui dépendent de la combinaison d'actions jouées sont versés aux joueurs ; ces règlements sont indiqués aux nœuds terminaux de l'arbre (le premier chiffre donne le règlement du joueur 1, le second celui du joueur 2)[16].

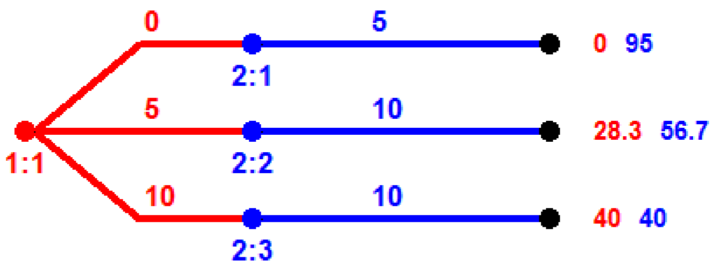
Une méthode de résolution naturelle consiste alors à se placer à la fin du jeu et à déterminer les choix optimaux du joueur qui joue en dernier, dans le cas présent 2, et ce pour tous ses nœuds de décision, c'est-à-dire à chaque fois qu'il est susceptible d'avoir la main. Ainsi, au nœud de décision 2:1[17], c'est-à-dire en considérant que 1 ne fait pas de publicité, on voit que 2 investira 5 car $95 > 90 > 50$ (dans ce cas de figure, un petit investissement de la part du joueur 2 suffit pour capter l'intégralité de la demande). Similairement, 2 investira 10 (car

[16]Plus précisément, le prix étant fixé, il en va de même pour la demande D et la part de marché α_1 de l'entreprise 1 (respectivement α_2 de l'entreprise 2) est déterminée par son effort relatif. On a ainsi $\alpha_1(I_1, I_2) = I_1/I_1 + I_2$ avec I_1 et I_2 les investissements publicitaires des firmes 1 et 2 (en l'absence de publicité, $I_1 = I_2 = 0$et $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$). Les valeurs reportés dans l'arbre 1 s'obtiennent en considérant que $p = 1$, $D = 100$ et que les coûts de production, hors budget publicitaire, sont nuls.

[17] Le premier chiffre indique que c'est le joueur 2 qui a la main, le second indique le numéro du nœud de décision.



Arbre 1 : la bataille publicitaire



Arbre 2 : la bataille publicitaire – jeu réduit

$56.7 > 45 > 0$) au nœud 2:2, c'est-à-dire si 1 investit 5, et encore 10 au nœud 2:3 (car $40 > 28.3 > 0$), c'est-à-dire si 1 investit 10.

Par la suite, les choix du joueur 2 ayant été déterminés, le joueur 1 est en mesure d'anticiper les actions qui seront jouées par 2 selon qu'il joue 0, 5 ou 10 et, en conséquence, les règlements qui sont associés *in fine* à chacune de ses stratégies. Ainsi, par exemple, 1 sait qu'il obtiendra 0 s'il n'investit pas car, derrière, 2 jouera $I_2 = 5$ (immanquablement). Similairement, 1 sait qu'il ne peut espérer obtenir 95 s'il investit 5 car il faut pour cela que 2 joue $I_2 = 0$ dans ce sous-jeu, ce qu'il ne fera pas (désireux de maximiser son règlement, 2 joue $I_2 = 10$ si 1 joue $I_1 = 5$). Le comportement du joueur 2 étant parfaitement prévisible, on peut dès lors considérer que 1 joue à un jeu simplifié, représenté par l'arbre n°2, que l'on obtient en éliminant dans chaque sous-jeu de l'arbre 1 les actions qui ne sont pas jouées par 2. Compte tenu de cette réduction, il est alors optimal pour 1 d'investir 10 (car $40 > 28.3 > 0$) auquel cas 1 joue $I_1 = 10$ suite à quoi 2 joue $I_2 = 10$ (résolution en cascade). Cette suite d'actions représente **l'équilibre parfait** du jeu. Techniquement, on l'a déterminé en appliquant **une récurrence à rebours** que l'on peut regarder comme un élagage progressif de l'arbre de jeu (le chemin ainsi identifié représente le déroulement du jeu à l'équilibre)[18]. L'analyse du duopole de Stackelberg constitue une illustration classique de ce principe de résolution (voir 6-4).

B) … lorsque l'information est imparfaite

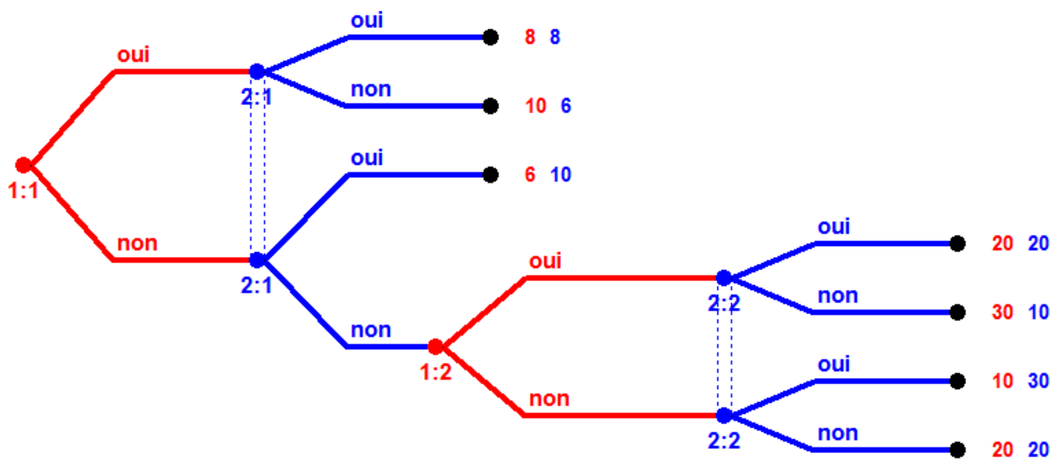
Une méthode de résolution similaire s'applique pour les jeux dynamiques à information imparfaite. On se propose de l'illustrer en considérant une version simplifiée du jeu des paniques bancaires de Diamond et Dybvig (1983).

Description du jeu Deux investisseurs, 1 et 2, ont déposé chacun une somme de D euros sur un compte commun auprès d'une banque d'affaires qui les a investies dans un projet de long terme. Si la banque doit liquider son investissement avant qu'il n'arrive à maturité, seul le montant de $2r$, avec $r < D$, peut être recouvert (i.e. dans ce cas de figure, l'opération est

[18] Un jeu peut admettre plusieurs équilibres parfaits. Cela peut survenir notamment lorsqu'un joueur est, à un moment donné du jeu, indifférent entre deux actions. Dans ce cas, il convient de distinguer deux cas selon que le joueur en question joue l'une ou l'autre de ces actions. Voir par exemple le jeu d'ultimatum présenté plus loin.

déficitaire). En revanche, si l'investissement arrive à maturité, le rendement (brut) du projet est $2R$ avec $R > D$ (i.e. dans ce cas de figure, il y a bien un retour sur investissement). Les investisseurs peuvent retirer leurs fonds à deux moments : en $t = 1$, avant que le projet n'arrive à maturité, ou en $t = 2$ après que le projet soit arrivé à maturité. Si les deux joueurs retirent leurs fonds en $t = 1$, chacun reçoit r et le jeu se termine ; si maintenant un seul retire en $t = 1$, celui qui retire recouvre ses fonds (D) tandis que l'autre reçoit le solde $2r - D$ et le jeu se termine. Pour finir, si personne ne retire en $t = 1$, le projet arrive à maturité et l'on doit à nouveau décider en $t = 2$ si l'on va ou non à la banque pour retirer ses fonds. Le partage des fonds disponibles se fait alors selon une règle similaire ($2R - D$ pour celui qui retire dans l'éventualité où un seul se rendrait à la banque, ce dernier récupérant son capital (D) et l'intégralité des intérêts ($2R - D$), R pour chacun dans les deux cas restants).

Représentation L'arbre de jeu n°3 donne la représentation de ce jeu (avec $D = 10$, $r = 8$ et $R = 30$). On remarquera que les nœuds de décision du joueur 2 sont reliés, à chaque étape, par un **ensemble** dit **d'information** (*cf.* les ensembles numérotés 2:1 et 2:2). Cela signifie que le joueur 2 au moment où il a la main, parce qu'il ne sait pas ce que le joueur 1 vient de jouer, ne sait pas précisément où il se situe dans l'arbre.



Arbre 3 : les paniques bancaires

Résolution On utilise une méthode qui relève de la même logique que l'induction à rebours si ce n'est qu'il convient, pour pouvoir appliquer la récurrence, de résoudre à la dernière étape, dans le sous-jeu qui fait suite aux actions (*non*, *non*), (*i*) non pas des problèmes de décision simples à un agent (le fait que les deux nœuds de décision du joueur 2 soient reliés par un ensemble d'information interdit de remonter) mais bien (*ii*) un problème de décision à deux joueurs dans lequel chacun joue sans connaître le choix de l'autre. Pris isolément, le sous-jeu qui fait suite aux actions (*non*, *non*) forme donc un jeu statique que l'on peut résoudre en appliquant l'équilibre de Nash. La bi-matrice correspondante étant donnée par (7), ce dernier se révèle être donné par (*oui*, *oui*)[19].

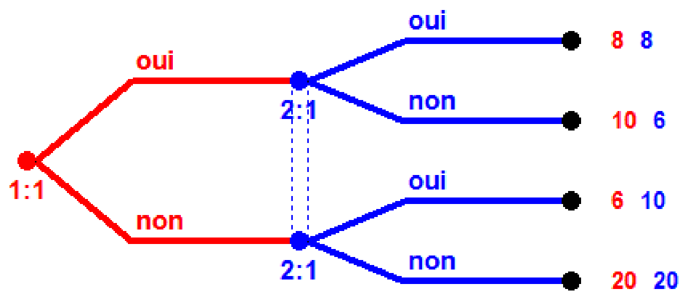
	oui	*non*
oui	$\underset{+}{R}, \underset{+}{R}$	$\underset{+}{2R - D}, D$
non	$D, \underset{+}{2R - D}$	R, R

Bi-matrice 7 : les paniques bancaires – équilibre de Nash du sous-jeu à l'étape 2

Par la suite, connaissant ce que les joueurs joueront si le jeu atteint l'étape 2, on remonte d'un cran et l'on remplace le sous-jeu qui fait suite à la suite d'actions (*non*, *non*) par ses règlements d'équilibre, soit ici (R, R). On obtient ainsi un jeu réduit (voir l'arbre 4) dont la bi-matrice des règlements est donnée par le jeu 8. Le calcul des meilleures réponses[20] montre alors que ce jeu réduit admet deux équilibres de Nash que sont (*oui*, *oui*) et (*non*, *non*). On en conclut que le jeu initial admet deux équilibres parfaits : un premier constitué du couple d'actions (*oui*, *oui*), ce qui génère des règlements de r pour chacun des joueurs, et un second constitué de la suite d'actions (*non*, *non*) suivi de (*oui*, *oui*), ce qui génère des règlements de R pour chacun des joueurs.

[19]Comme $R > D$, $u_1(oui, oui) = R > u_1(non, oui) = D$ et $u_1(oui, non) = 2R - D > u_1(non, non) = R$. La meilleure réponse de 1 consiste donc bien (*i*) à aller à la banque si 2 y va et (*ii*) à aller à la banque si 2 n'y va pas. Par symétrie, il en va de même pour le joueur 2 et le jeu 6 admet bien un unique équilibre de Nash : le profil (oui, oui).

[20]Comme $r < D$, $u_1(non, oui) = 2r - D = r + r - D < r = u_1(oui, oui)$ et il est optimal pour 1 d'aller retirer ses fonds si 2 y va (similairement, 2 joue *oui* si 1 joue *oui*). Si maintenant 2 s'abstient, 1 fait de même car $u_1(non, non) = R > D = u_1(oui, non)$ (de la même façon, il est optimal pour 2 de jouer *non* si 1 joue *non*).



Arbre 4 : les paniques bancaires – jeu réduit

	oui	*non*
oui	$\underset{+}{r}, \underset{+}{r}$	$D, 2r - D$
non	$2r - D, D$	$\underset{+}{R}, \underset{+}{R}$

Bi-matrice 8 : les paniques bancaires – équilibre de Nash du jeu réduit

Le premier équilibre peut s'interpréter comme **une panique bancaire**. Ainsi si 1 pense que 2 va retirer ses fonds, la meilleure réponse de 1 consiste à retirer ses fonds et réciproquement. Cet équilibre est dominé au sens de Pareto par un autre équilibre, celui par lequel les deux investisseurs attendent demain pour retirer leurs fonds, qui leur permet d'améliorer leurs règlements. On interprète ce résultat en énonçant que le modèle, s'il ne prédit pas le moment où les paniques bancaires se produisent, montre que les paniques bancaires lorsqu'elles se produisent sont un phénomène d'équilibre (avec des agents qui se comportent alors de façon tout à fait rationnelle).

C) Critiques et limites

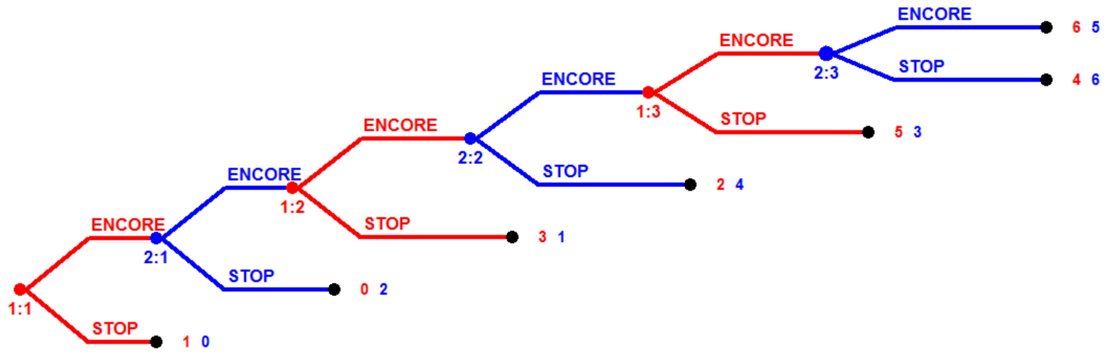
Si la récurrence à rebours apparaît comme une façon assez naturelle de résoudre un jeu dynamique, elle peut aussi requérir, dans certains contextes, des raisonnements excessivement sophistiqués qui vont sans nul doute dépasser les capacités cognitives des joueurs. L'exemple traditionnellement donné est celui des jeux d'échecs dont on sait qu'on peut le résoudre récursivement (Théorème de Zermelo (1913)) mais dont on ne connaît pas la solution, essentiellement parce que le nombre de décisions à analyser est trop important. D'autre part, force est de constater que les joueurs ne jouent pas toujours l'équilibre parfait, comme l'illustrent les expérimentations du jeu du mille-pattes de Rosenthal (1981) et celles du jeu d'ultimatum.

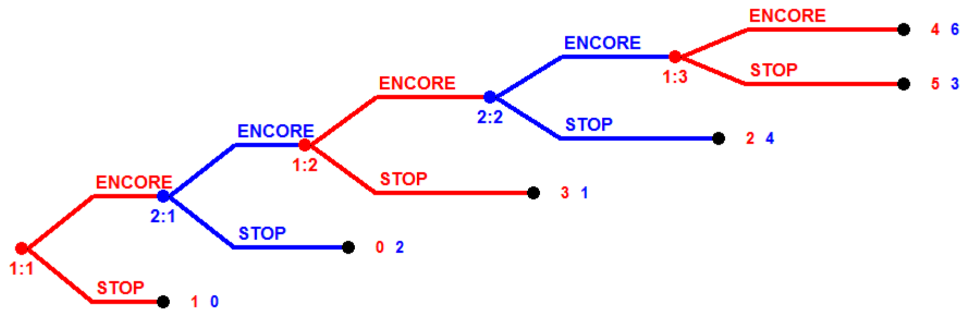
Le jeu du mille-pattes est un jeu dynamique à deux joueurs, notés 1 et 2, dans lequel chacun a à tour de rôle l'occasion de s'emparer de la plus grande part d'un magot qui croît à chaque étape. Dès qu'un joueur choisit de prendre sa part, action notée STOP, le jeu s'arrête tandis que l'autre action, notée ENCORE, fait qu'il continue. L'arbre 5 présente une version à six étapes (la version originale en contient 100). Si les joueurs jouent ENCORE à chaque étape, on parvient au dernier sous-jeu avec 1 qui obtient 6 et 2 qui obtient 5. L'application de la récurrence à rebours montre alors que 2 jouera STOP à la dernière étape (ce qui lui permet d'obtenir 6 contre 5 s'il joue ENCORE) de sorte que, à l'étape précédente, 1 a intérêt à jouer STOP qui lui rapporte 5 contre 4 s'il joue ENCORE … et ainsi de suite jusqu'à la 1ère étape où 1 joue STOP de façon à gagner 1 plutôt que 0. A l'équilibre, le jeu s'arrête ainsi dès le premier coup, ce qui n'est pas Pareto optimal. Les expériences (*cf.* notamment McKelvey et Palfrey, 1992) montrent alors que ce résultat prédit par la théorie sort très rarement, une certaine coopération entre les joueurs apparaissant le plus souvent (les sujets coopèrent toutefois rarement tout au long du jeu). Le seul cas où l'équilibre parfait est effectivement joué est celui dans lequel les sujets de l'expérience sont des joueurs d'échec expérimentés (Palacios-Huerta et Volij, 2009) … et dont on peut penser qu'ils sont assez familiers de la récurrence à rebours.

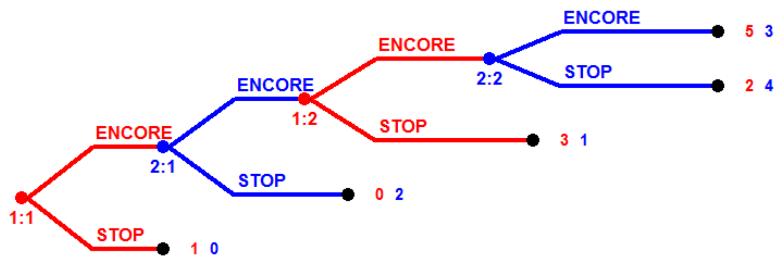
Le jeu d'ultimatum relève plus généralement d'une famille de problèmes connue sous le terme de **division du $** et qui se décrit précisément comme suit.

La division du $ - description *Un philanthrope offre à John et à Mary la possibilité de se partager un dollar à condition qu'ils s'accordent sur son partage. Plus précisément, si John et Mary parviennent à se mettre d'accord sur le montant qui doit revenir à chacun, chacun obtient la somme convenue. Dans le cas contraire, ils n'ont rien.*

Arbre 5 : le jeu du mille-pattes – Rosenthal (1981) … et sa résolution :







⋮

A ce stade, comme le fait remarquer Binmore (1992), on soulignera qu'un jeu de division du $ rend compte, en dépit de sa grande simplicité, d'un grand nombre de situations réelles. On peut penser notamment à l'exemple d'une transaction immobilière avec (*i*) un acheteur potentiel qui évalue le bien à 300.000 € et (*ii*) le vendeur qui l'évalue à 200.000 €. Dans ce contexte, (*i*) le dollar représente le surplus qui est généré par la transaction si elle aboutit ($1 = 3 - 2$, unité centaine de milliers d'euro) et (*ii*) la règle imposée par le philanthrope (i.e. le fait que le dollar soit disponible à condition que les agents se soient mis d'accord sur son partage) matérialise le fait qu'il n'y aura pas de surplus si les agents ne s'entendent pas sur un prix de cession. De plus, (*iii*) en se mettant d'accord sur un prix de cession, les agents se mettent aussi d'accord sur une répartition du surplus (i.e. sur le partage du $).

Il s'agit alors de préciser comment la négociation va se faire entre les deux agents. La difficulté est qu'il existe une multitude de procédures possibles parmi lesquelles la plus simple est celle du **jeu d'ultimatum**. Cette dernière se décrit précisément comme suit[21].

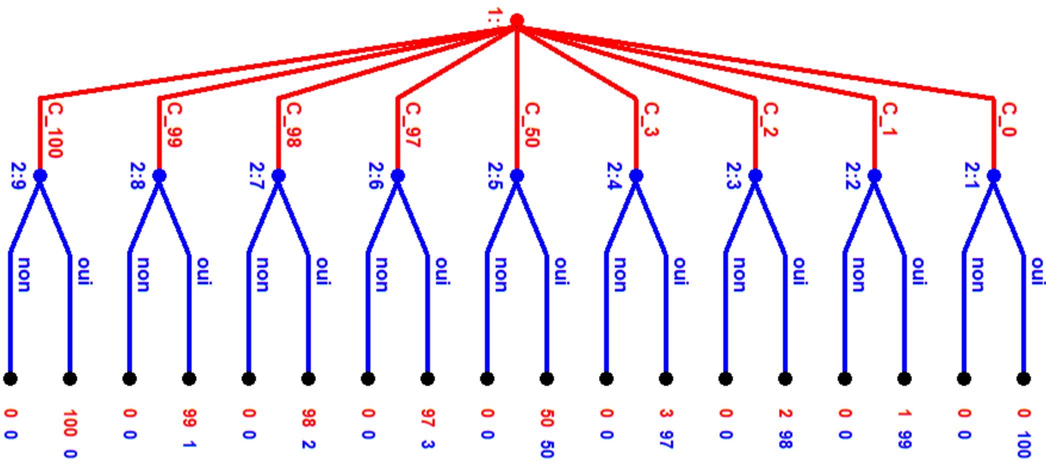
Etape 1 *John propose un partage du dollar à Mary.*

Etape 2 *Ayant pris connaissance de la proposition de John, Mary l'accepte ou la refuse.*

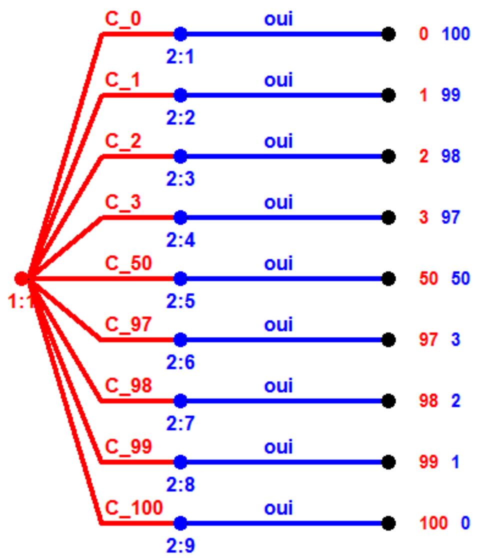
Etape 3 *Les règlements sont versés sachant que deux cas sont à distinguer. Dans le premier, la proposition de John est acceptée par Mary auquel cas la répartition proposée est mise en place et le jeu se termine. Dans le second, la proposition de John est rejetée auquel cas les joueurs n'ont rien (il y a absence d'accord) et le jeu se termine.*

L'arbre 6 donne une représentation (simplifiée) de ce jeu. Le centime étant la plus petite unité monétaire, il existe à l'origine 101 propositions possibles parmi lesquelles John ne prend rien et laisse tout à Mary (contrat $C_0 = (0{,}100)$), John prend 1 centime et en laisse 99 à Mary (contrat $C_1 = (1{,}99)$), …, John prend 99 centimes et en laisse 1 à Mary (contrat $C_{99} = (99{,}1)$), John prend tout et ne laisse rien à Mary (contrat $C_{100} = (100{,}0)$). Une fois la

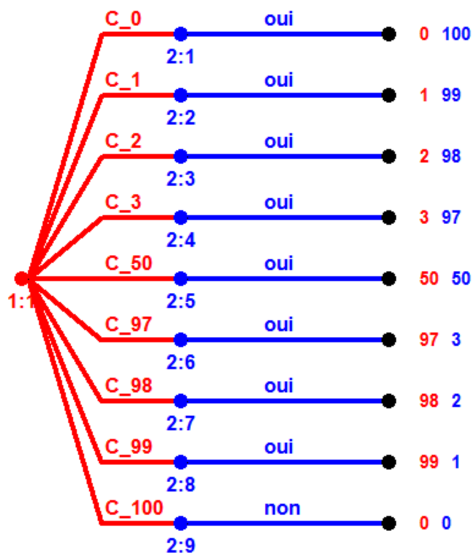
[21] Comme le fait de nouveau remarquer Binmore (1992), le jeu d'ultimatum est non seulement la procédure la plus simple à laquelle on puisse penser mais aussi la plus réaliste, la plupart des transactions étant dans les faits régie par cette règle. Dans le commerce de détail en particulier, le rôle de John est tenu par le commerçant qui affiche le prix du bien sur une étiquette, celui de Mary par le consommateur qui, après avoir pris connaissance du prix, achète ou n'achète pas le bien en question.



Arbre 6 : le jeu d'ultimatum



Arbre 7 : le jeu d'ultimatum – jeu réduit n°1



Arbre 8 : le jeu d'ultimatum – jeu réduit n°2 proposition de John transmise à Mary, cette dernière peut l'accepter (elle joue alors oui) ou la refuser (elle joue alors non). Dans l'éventualité où la proposition $C_\alpha = (\alpha, 100 - \alpha)$ serait acceptée, ce partage est mis en place et les règlements des joueurs sont donnés par $u_1(C_\alpha, \text{oui}) = \alpha$ et $u_2(C_\alpha, \text{oui}) = 100 - \alpha$. Si maintenant elle est refusée, $u_1(C_\alpha, \text{non}) = u_2(C_\alpha, \text{non}) = 0$.

Ce jeu étant un jeu dynamique à information parfaite, on peut le résoudre en appliquant une récurrence à rebours. On voit alors aisément que pour toute proposition $C_\alpha = (\alpha, 100 - \alpha)$ telle que $0 \leq \alpha < 100$, la maximisation de son règlement fait que Mary accepte (car $u_2(C_\alpha, \text{oui}) = 100 - \alpha > u_2(C_\alpha, \text{non}) = 0$). En revanche, lorsque John joue $C_{100} = (100{,}0)$, offre par laquelle il prend tout, Mary est en toute rigueur indifférente entre accepter ou refuser cette proposition. Vis-à-vis de la détermination de l'équilibre parfait, il convient de distinguer deux cas selon que le joueur 2 accepte ou refuse ce partage. On obtient ainsi deux jeux réduits, représentés par les arbres 7 et 8, et pour lesquels la maximisation du règlement du joueur 1 l'amène à jouer respectivement C_{100} (cas dans lequel Mary dit oui si John joue C_{100}), et C_{99} (cas dans lequel Mary dit non si John joue C_{100}). Au bout du compte, le jeu d'ultimatum admet donc deux équilibres parfaits : (C_{99}, oui) et (C_{100}, oui).

En règle générale, le centime étant la plus petite unité monétaire, on interprète ce résultat en énonçant que le joueur 1 prend tout à ε près. La solution prédite par la récurrence à rebours énonce donc que le joueur 1 proposera une somme très faible au joueur 2, ce dernier préférant dans tous les cas de figure pas grand-chose à rien du tout. Or, les expériences menées par Guth et al. (1982) montrent que le joueur 1 ne s'attribue en général que 50 à 60 % du montant à partager et que le joueur 2 refuse majoritairement les offres inférieures à 20% du montant à partager. Dans ce type de situations, les motivations sociales l'emportent clairement sur l'égoïsme supposé des joueurs.

Pour conclure, on notera également que la méthode de la récurrence à rebours est parfois critiquée au titre qu'elle serait contradictoire avec la rationalité des joueurs, son application requérant d'examiner ce qu'il adviendrait dans des sous-jeux qui ne sont pas atteints à l'équilibre. Ainsi, dans le jeu du mille-pattes par exemple, l'équilibre parfait qui est 1 joue STOP et le jeu s'arrête est déterminé en examinant ce qu'il adviendrait dans le dernier sous-jeu, le problème de décision débutant au nœud 2:3, et dans lequel on détermine que le joueur

2, parce qu'il est rationnel, jouera STOP. De fait, atteindre le nœud de décision 2:3 requiert que les joueurs 1 et 2 dévient de l'équilibre parfait (qui est 1 joue STOP et le jeu s'arrête) et jouent ENCORE à toutes les étapes, ce qu'ils ne devraient a priori pas faire précisément parce qu'ils sont rationnels. Cette incohérence fait dire alors à certains auteurs qu'appliquer la récurrence à rebours et considérer que les joueurs sont rationnels lorsqu'ils doivent faire des choix en des nœuds de décision qui ne seraient jamais atteints s'ils étaient rationnels est contradictoire avec l'hypothèse de rationalité des joueurs.

Cette dernière critique est trop forte. Ainsi, comme le souligne Gibbons (1993), il s'avère qu'être hors équilibre n'est pas (nécessairement) contradictoire avec la rationalité des joueurs, i.e. jouer ENCORE à l'étape 1 pour le joueur 1 ne signifie pas que 1 n'est pas rationnel. En revanche, c'est contradictoire avec l'hypothèse dite de connaissance commune (common knowledge) et selon laquelle (*i*) 1 et 2 sont rationnels, (*ii*) 1 sait que 2 est rationnel et 2 sait que 1 est rationnel, (*iii*) 1 sait que 2 sait que 1 est rationnel et 2 sait que 1 sait que 2 est rationnel, … cela autant de fois que nécessaire. Notamment, on peut justifier le fait que 1 et 2 jouent ENCORE aux étapes intermédiaires en considérant par exemple que 1 et 2 sont rationnels mais que 1 ne sait pas que 2 est rationnel (sous cette hypothèse, 1 peut jouer ENCORE en espérant que 2, parce qu'il serait irrationnel, joue ENCORE à toutes les étapes, ce qui lui permettra d'obtenir un règlement de 6). Alternativement, on peut également supposer que 1 et 2 sont rationnels, que 1 sait que 2 est rationnel mais que 2 ne sait pas que 1 est rationnel. Dans ces conditions, le fait que 1 joue ENCORE (et non pas STOP) à l'étape 1 peut créer le trouble chez le joueur 2, ce dernier pouvant considérer soit que 1 joue ENCORE de façon à lui laisser à penser qu'il n'est pas rationnel, soit que 1 est effectivement irrationnel. Dans ce cas de figure, 2 peut estimer que 1 continuera à jouer ENCORE à chaque fois qu'il aura la main, ce qui lui permettra de jouer STOP à la dernière étape et de percevoir un règlement de 6 (au lieu de 2 s'il jouait STOP à la seconde étape). De tels raisonnements ne sont pas contradictoires avec l'hypothèse de rationalité des joueurs. En revanche, ils le sont avec l'hypothèse de connaissance commune et il est nécessaire de relâcher cette hypothèse pour pouvoir appliquer la récurrence à rebours.

V – Les jeux dynamiques : l'approche en termes de stratégies

A) Stratégies et équilibres de Nash dans un jeu dynamique

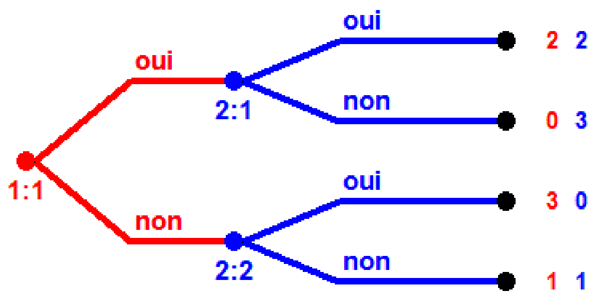
Un jeu dynamique peut également se résoudre en mobilisant les concepts d'équilibre utilisés pour résoudre les jeux statiques dont, en particulier, l'équilibre de Nash. Toutefois, lorsque tel est le cas, ce que l'on s'attache à déterminer n'est pas tant un sentier d'équilibre dans l'arbre de jeu qu'un ensemble d'annonces tenues par les joueurs avant le déroulement du jeu. La raison en est qu'un équilibre de Nash est un équilibre en stratégies et qu'**une stratégie dans un jeu dynamique est un plan complet d'actions**, spécifiant pour tout ensemble d'information où le joueur est susceptible d'avoir la main[22]une action réalisable à ce moment du jeu.

Le point est alors qu'une stratégie diffère, en règle générale, d'une action. Ainsi, pour le jeu représenté par l'arbre 9, une stratégie du joueur 2, parce que ce joueur a deux nœuds de décision, spécifie deux actions : une dans l'éventualité où 2 se situerait au nœud 2:1, c'est-à-dire si 1 jouait oui, et une dans l'éventualité où 2 se situerait au nœud 2:2, c'est-à-dire si 1 jouait non. L'ensemble des actions possibles du joueur 2, noté A_2, comprenant deux éléments (*oui* et *non*), le joueur 2 dispose ainsi de quatre stratégies que sont :

$$S_2 = \{s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}\} = \{(oui, oui), (oui, non), (non, oui), (non, non)\}$$

avec la première action qui spécifie ce que le joueur 2 compte faire si 1 joue oui et la seconde ce qu'il compte faire si 1 joue non (le fait que 2 soit en capacité d'observer ce qui sera joué par 1 à l'étape 1 lui permet effectivement de conditionner sa décision sur ce qui sera fait par ce joueur). En revanche, le joueur 1 ayant une seule fois la main, ses stratégies se limitent à spécifier une action et l'on a directement $S_1 = A_1 = \{oui, non\}$. De ce fait, en ce qui concerne leur interprétation, (*i*) une stratégie dans un jeu dynamique peut se regarder comme un ensemble d'annonces faites par un joueur et (*ii*) un résultat $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ comme une discussion qui se tient entre les joueurs, le tout durant une phase de négociation se déroulant avant le lancement du jeu (« *pre-play negotiation* »).

[22] Ou bien encore et de façon équivalente « *pour tout nœud de décision où le joueur est susceptible d'avoir la main* » lorsque l'information est parfaite. L'usage veut en effet que l'on ne fasse pas figurer les ensembles d'information dans un jeu à information parfaite étant entendu que, dans un tel cas de figure, chaque ensemble d'information contient un et un seul nœud de décision.



Arbre 9

L'intérêt d'une telle approche est que, connaissant les stratégies des joueurs, on peut (*i*) associer à l'arbre de jeu n°9 une bi-matrice des règlements qui s'écrit ici :

	$s_{21} = (oui, oui)$	$s_{22} = (oui, non)$	$s_{23} = (non, oui)$	$s_{24} = (non, non)$
$s_{11} = oui$	$2, 2$	$\underset{+}{2}, 2$	$0, \underset{+}{3}$	$0, \underset{+}{3}$
$s_{12} = non$	$\underset{+}{3}, 0$	$1, \underset{+}{1}$	$\underset{+}{3}, 0$	$\underset{+}{1}, \underset{+}{1}$

Bi-matrice 9

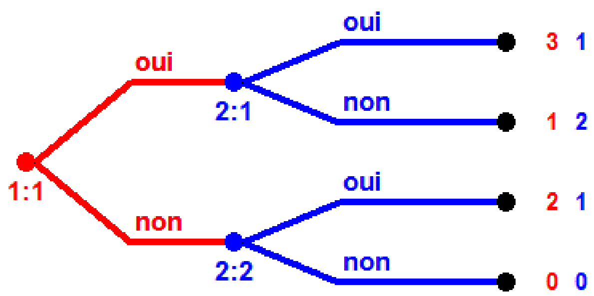
puis (*ii*) déterminer le ou les équilibres de Nash de cette bi-matrice en localisant l'intersection des meilleures réponses, soit dans le cas présent $(s_1^*, s_2^*) = (s_{12}, s_{24}) = (non, (non, non))$. En cet équilibre de Nash, le joueur 1 joue *non* suite à quoi le joueur 2, appliquant sa stratégie et constatant que 1 a joué *non*, joue *non* (soit l'action que prévoit de jouer sa stratégie au nœud de décision 2:2). Le déroulement du jeu généré par cet équilibre de Nash est alors $(a_1^*, a_2^*) = (non, non)$, ce qui coïncide avec l'équilibre parfait du jeu[23]. De ce fait, l'équilibre de Nash et l'équilibre parfait se révèlent être ici deux concepts d'équilibre équivalents, équivalents au sens où ils conduisent à un même déroulement du jeu et, ce faisant, à des

[23] Le joueur 2 a intérêt à jouer *non* si 1 joue *oui*, car $u_2(oui, non) = 3 > u_2(oui, oui) = 2$, et à jouer *non* si 1 joue *non*, car $u_2(non, non) = 1 > u_2(non, oui) = 0$. Compte tenu de ce comportement, il est alors optimal pour 1 de jouer *non* car $u_1(non, non) = 1 > u_1(oui, non) = 0$.

mêmes règlements d'équilibre. La difficulté est alors que ceci n’est pas en règle générale le cas.

B) Le critère de perfection

Une difficulté avec les jeux dynamiques est qu’ils admettent le plus souvent un grand nombre d’équilibres de Nash, ces derniers pouvant alors induire des déroulements du jeu très différents. Le jeu n°10 :



Arbre 10

vient illustrer ce point. Son équilibre parfait est constitué de la suite d’actions $(a_1^*, a_2^*) = (non, oui)$ avec, parallèlement, une bi-matrice des règlements qui est donnée par :

	$s_{21} = (oui, oui)$	$s_{22} = (oui, non)$	$s_{23} = (non, oui)$	$s_{24} = (non, non)$
$s_{11} = oui$	$\underset{+}{3}, 1$	$\underset{+}{3}, 1$	$1, \underset{+}{2}$	$\underset{+}{1}, \underset{+}{2}$
$s_{12} = non$	$2, \underset{+}{1}$	$0, 0$	$\underset{+}{2}, \underset{+}{1}$	$0, 0$

Bi-matrice 10

Après calcul des meilleures réponses, on constate que ce jeu admet deux équilibres de Nash, le premier étant donné par $(s_{11}, s_{24}) = (oui, (non, non))$ et le second par $(s_{12}, s_{23}) = (non, (non, oui))$. La difficulté est alors que ces deux équilibres génèrent des déroulements du jeu (et des règlements) qui diffèrent. Ainsi, le premier équilibre fait jouer la suite d’actions

$(a_1, a_2) = (oui, non)$ avec des joueurs qui obtiennent alors $(u_1^*, u_2^*) = (1,2)$ tandis que le second fait jouer l'équilibre parfait $(a_1, a_2) = (non, oui)$ avec des règlements qui sont alors donnés par $(u_1^*, u_2^*) = (2,1)$. On a ainsi un problème d'équilibres multiples et il convient de mobiliser un critère de raffinement pour pouvoir lever, si possible, l'indétermination. Dans les jeux dynamiques, **ce critère de raffinement est** alors **constitué du critère de perfection** (en priorité).

Le critère de perfection Les stratégies du joueur 2 pouvant s'interpréter comme des menaces (ou des promesses), l'idée du critère de perfection est de regarder si ces menaces sont crédibles, i.e. le joueur qui les professe aurait-il intérêt, mis en situation, à les mettre à exécution ? Si la réponse est positive, l'équilibre de Nash considéré repose sur des menaces crédibles ; il est alors qualifié de parfait (on parle précisément d'équilibre de Nash parfait en sous-jeux ou **ENPSJ**). A contrario, si la réponse est négative, l'équilibre en question, parce qu'il repose sur des menaces qui ne sont pas crédibles, présente un caractère fallacieux et doit être écarté.

Application On reprend l'équilibre de Nash $(s_{11}, s_{24}) = (oui, (non, non))$ du jeu 10 par lequel le joueur 2 annonce au joueur 1 qu'il jouera *non* si 1 joue *oui* et *non* si 1 joue *non*. Face à cette promesse du joueur 2, il est alors effectivement optimal pour le joueur 1 de jouer *oui* ; le joueur 2 jouant *non* dans tous les cas de figure, 1 calcule en effet qu'il obtiendra $u_1(oui, non) = 1$ s'il joue *oui* et $u_1(non, non) = 0$ s'il joue *non* de sorte que jouer *oui* est une meilleure réponse du joueur 1 (face à cette stratégie $s_2 = s_{24} = (non - non)$ du joueur 2). Similairement, sachant que 1 joue *non*, toute stratégie du joueur 2 qui prévoit de jouer *non* si 1 joue *oui* constitue une meilleure réponse du joueur 2 (c'est la raison pour laquelle les deux stratégies $s_{23} = (non, oui)$ et $s_{24} = (non, non)$ apparaissent en meilleure réponse dans la bi-matrice 10). Ces différents éléments font que le profil $(s_{11}, s_{24}) = (oui, (non, non))$ est bien en équilibre de Nash.

Il s'avère que la stratégie jouée par le joueur 2 en cet équilibre prévoit de jouer *non* si 1 joue *non* et ce volet de la stratégie est décisif car c'est précisément cet engagement du joueur 2 qui amène le joueur 1 à jouer *oui* à l'étape 1. Dans ces conditions, il est légitime de s'assurer de la crédibilité de cette menace et de vérifier que le joueur 2, mis au pied du mur, aurait effectivement intérêt à jouer *non* si 1 jouait *non*. De fait, il s'avère que la réponse à cette question est négative : si 1 joue *non*, il n'est pas en effet dans l'intérêt du joueur 2 de jouer *non* mais *oui* (car $u_2(non, oui) = 1 > u_2(non, non) = 0$). En d'autres termes, mis en situation, le joueur 2 n'aurait pas intérêt à appliquer sa menace qui apparaît alors comme étant non crédible. De ce fait, le joueur 2 s'il communiquait sur une telle stratégie serait en train de bluffer et, dans la mesure où il est relativement facile pour le joueur 1 de le démasquer, on peut aller plus loin du point de vue théorique et considérer que cet équilibre de Nash, quand bien même il existe, ne sera pas celui qui sera joué par des joueurs « *intelligents* » dans cette phase de discussion qui se tient avant le déroulement du jeu[24].

On se tourne à présent vers le second équilibre de Nash $(s_{12}, s_{23}) = (non, (non, oui))$ par lequel le joueur 2 annonce au joueur 1 qu'il jouera *non* si 1 joue *oui* et *oui* si 1 joue *non*. Face à ces promesses du joueur 2, il est alors effectivement optimal pour le joueur 1 de jouer *non* ; compte tenu de la stratégie du joueur 2, 1 anticipe en effet qu'il obtiendra $u_1(oui, non) = 1$ s'il joue *oui* et $u_1(non, oui) = 2$ s'il joue *non* auquel cas jouer *non* est une meilleure réponse de 1 à la stratégie $s_2 = s_{23} = (non, oui)$ de 2. Parallèlement, sachant que 1 joue *non*, toute stratégie qui prévoit de jouer *oui* si 1 joue *non*, dont en particulier $s_{23} = (non, oui)$, constitue une meilleure réponse du joueur 2 et le profil $(s_{12}, s_{23}) = (non, (non, oui))$ forme bien un équilibre de Nash. Le point à souligner est alors que cet équilibre repose sur des menaces qui sont toutes crédibles. Ainsi, en cet équilibre, la stratégie du joueur 2 prévoit de jouer *non* si 1 jouait *oui*, ce que 2 aurait effectivement intérêt à faire si jamais 1 déviait de sa stratégie et jouait *oui* au lieu de *non* (car $u_2(oui, non) = 2 > u_2(oui, non) = 1$). De ce fait, cet équilibre de Nash est parfait et correspondra, selon toute vraisemblance, à celui qui sera effectivement joué par des joueurs « *intelligents* » lors de cette phase de discussion qui se tient avant le déroulement du jeu.

C) Construction des ENPSJ

Disposant de l'équilibre parfait, le concept de l'ENPSJ peut sembler constituer une méthode de résolution superflue. Toutefois, comme souligné plus haut, ce concept est particulièrement utile dans les jeux infiniment répétés qui présentent la particularité de ne pas avoir de fin (ou dont la date de fin n'est pas connue avec certitude) et que l'on ne peut résoudre en appliquant une récurrence à rebours (la résolution doit se faire vers l'avant). D'autre part, il s'avère qu'il

[24] Suivant Myerson (1991), page 4, "*a player in a game is intelligent if he knows everything that we know about the game and he can make any inferences about the situation that we can make*".

existe une relation simple entre les deux concepts d'équilibre ; notamment, **il est toujours possible de construire, à partir des résultats de la récurrence à rebours, un ENPSJ**.

Ainsi et reprenant l'arbre de jeu n°10, la récurrence à rebours établit (*i*) qu'il est optimal pour le joueur 2 de jouer *non* dans le sous-jeu J_1, celui qui débute au nœud de décision 2:1, et (*ii*) qu'il est optimal pour le joueur 2 de jouer *oui* dans le sous-jeu J_2, celui qui débute au nœud de décision 2:2[25]. De ce fait, toute stratégie crédible du joueur 2 doit prévoir de jouer *non* dans le sous-jeu J_1, c'est-à-dire si 1 joue *oui*, et de jouer *oui* dans le sous-jeu J_2, c'est-à-dire si 1 joue *non*. Avec le calcul de l'équilibre parfait, les résultats (intermédiaires) produit par l'application de la récurrence à rebours permettent alors d'identifier d'ores-et-déjà ce que doit être une stratégie crédible du joueur 2, soit dans le cas présent la stratégie $s_{23} = (non, oui)$. Parallèlement, face à cette stratégie crédible du joueur 2, une stratégie du joueur 1 doit préciser une (unique) action optimale qui ne peut alors être donnée que par celle que l'on a déterminé à la seconde étape de la récurrence à rebours, soit dans le cas présent *non*. On obtient ainsi et directement $\left(s_1^{enpsj}, s_2^{enpsj}\right) = (non, (non, oui))$.

En résumé, on peut donc utiliser les résultats obtenus avec le calcul de l'équilibre parfait pour construire l'ENPSJ : il suffit pour cela de spécifier les actions optimales des joueurs à chacun de leurs nœuds de décision et que l'on identifie en appliquant la récurrence à rebours. Pour conclure, on notera qu'une méthode similaire s'applique pour les jeux dynamiques à information imparfaite. Dans ce cas de figure, une stratégie doit spécifier pour tout ensemble d'information où le joueur est susceptible d'avoir la main une action réalisable à ce moment du jeu[26] et l'exigence de crédibilité des menaces impose aux stratégies de faire jouer aux joueurs des actions qui sont en équilibre de Nash dans tous les sous-jeux (on dit aussi que les stratégies appellent à jouer l'équilibre de Nash). Notant a_{it} l'action jouée par le joueur *i* à la date *t*, on identifie ainsi dans le jeu des paniques bancaires deux ENPSJ que sont :

$$(s_1^*, s_2^*) = (a_{11}^*, a_{12}^*), (a_{21}^*, a_{22}^*) = ((non, oui), (non, oui))$$

[25]De façon informelle, un sous-jeu d'un jeu sous forme extensive (ou arbre de jeu) Γ est un arbre de décision complet, commençant en un nœud de décision singleton et que l'on peut extraire du jeu initial sans couper d'ensemble d'information. Le jeu 9 admet bien ainsi deux sous-jeux, un commençant au nœud de décision 2:1 et un second commençant au nœud de décision 2:2, chacun décrivant en fait un problème de décision simple du joueur 2. Le jeu du mille-pattes, représenté par l'arbre n°5, en admet quant-à-lui 5 (le plus petit débute en 2:3, celui immédiatement supérieur qui inclut 2:3 débute en 1:3, le troisième qui inclut les deux précédents débute en 2:2 etc.) et le jeu des paniques bancaires, représenté par l'arbre n°4, un seul (il débute au nœud de décision 1:2).

[26] Comme l'illustre le jeu des paniques bancaires, le joueur 2 ne peut pas conditionner son comportement sur des nœuds de décision qui sont éléments d'un même ensemble d'information.

$$(s_1^{**}, s_2^{**}) = (a_{11}^{**}, a_{12}^{**}), (a_{21}^{**}, a_{22}^{**}) = ((oui, oui), (oui, oui))$$

et qui font chacun jouer dans l'unique sous-jeu l'équilibre de Nash de ce sous-jeu (soit $(a_{12}^*, a_{22}^*) = (oui, oui)$). Ce faisant, le critère de perfection conduit ainsi à écarter les profils $((oui, oui), (oui, non))$, $((oui, non), (oui, oui))$ et $((oui, non), (oui, non))$ qui sont en équilibre de Nash dans le jeu original mais qui ne font pas jouer un équilibre de Nash dans le sous-jeu (voir la bi-matrice ci-dessous). Cette construction repose sur le Théorème de Selten qui énonce qu'un équilibre de Nash est parfait (en sous-jeux) si les stratégies qu'il spécifie forment des équilibres de Nash dans tous les sous-jeux[27].

	(oui, oui)	(oui, non)	(non, oui)	(non, non)
(oui, oui)	$\underset{+}{r}, \underset{+}{r}$	$\underset{+}{r}, \underset{+}{r}$	$D, 2r - D$	$D, 2r - D$
(oui, non)	$\underset{+}{r}, \underset{+}{r}$	$\underset{+}{r}, \underset{+}{r}$	$D, 2r - D$	$D, 2r - D$
(non, oui)	$2r - D, D$	$2r - D, D$	$\underset{+}{R}, \underset{+}{R}$	$\underset{+}{2R - D}, D$
(non, non)	$2r - D, D$	$2r - D, D$	$D, \underset{+}{2R - D}$	R, R

Bi-matrice 11

VI – Quelques applications

A) Le « chairman'sparadox »

Proposé par Farquharson en 1969, ce paradoxe illustre la façon avec laquelle la théorie des jeux (et le principe d'élimination de stratégies dominées) peut éclairer une situation de vote. Trois personnes, 1, 2 et 3, doivent choisir par un vote une option dans un ensemble de trois alternatives, A, B et C. Les préférences des votants sont transitives et la règle de choix collectif est la suivante : (1) chaque personne vote pour une option et l'option choisie est celle

[27] On remarquera également que les stratégies doivent spécifier ce que les joueurs envisagent de jouer dans tous les sous-jeux y compris ceux qui n'ont aucune chance d'être atteints pour la combinaison de stratégies considérées. Ainsi, par exemple, l'ENPSJ $((oui, oui), (oui, oui))$ prévoit de faire jouer aux joueurs l'équilibre de Nash du sous-jeu à l'étape 2, soit $(a_{12}^*, a_{22}^*) = (oui, oui)$, et ce alors qu'il fait également jouer (oui, oui) à l'étape 1, ce qui fait que le jeu s'arrête dès l'étape 1. Ce degré de précision des stratégies qui peut sembler superflu se révèle en fait nécessaire pour pouvoir tester la crédibilité des menaces.

qui recueille le plus grand nombre de voix et (2) en cas d'*ex aequo*, c'est 1 qui en tant que « président » (chairman) impose son choix.

L'individu 1 préfère A à B et B à C ; 2 préfère C à A et A à B ; 3 préfère B à C et C à A (les préférences de chacun sont connues de tous). Par la suite, si chacun vote sincèrement (ou naïvement), chaque option obtient une voix et, la préférence du président s'imposant, l'option A est choisie. Qu'en est-il à présent si les électeurs votent stratégiquement (adoptant ce que Farquharson appelle un comportement *sophistiqué*) ? Il est facile de vérifier qu'un électeur n'a jamais intérêt à voter pour son dernier choix (soit cette stratégie ne change rien au résultat final, soit elle conduit à l'élection de l'option que l'électeur considéré classe dernière). Chaque électeur peut donc *a priori* envisager deux stratégies : voter pour son premier choix ou bien voter pour son deuxième choix (« *vote utile* »). Considérons le choix stratégique du votant 1 (le président) ; on peut le résumer dans le tableau suivant où les choix du joueur 1 apparaissent sur la colonne 1 et ceux des joueurs 2 et 3 sur la ligne 1. Les cellules du tableau précisent le choix collectif qui en résulte (par exemple, si 1 vote A et si 2 et 3 votent C et C, l'option C est élue).

	C-B	C-C	A-B	A-C
A	A	C	A	A
B	B	C	B	A

Tableau 1 : « *Voter A est une stratégie dominante (non strictement) du joueur 1* »

La comparaison des résultats possibles montre alors que, en ce qui concerne le joueur 1, la stratégie qui consiste à voter A domine (dans le cas présent, non strictement) celle qui consiste à voter B. En votant A, 1 fait en effet mieux ou aussi bien qu'en votant B, cela quels que soient les choix stratégiques des autres joueurs. On peut donc considérer que 1 décidera de voter A. Le joueur 2 pouvant faire le calcul stratégique qui vient d'être effectué, 2 sait que 1 votera A. Comme il sait aussi que 3 peut voter pour B ou pour C, son problème se résume au bout du compte au tableau suivant (les stratégies de 2 figurent dans la $1^{ère}$ colonne, celles de 1 et 3 dans la $1^{ère}$ ligne) :

	A-B	A-C
C	A	C
A	A	A

Tableau 2 : « *Sachant que 1 vote pour A*, v*oter C est une stratégie dominante (non strictement) du joueur 2* »

Le joueur 2 qui préfère C à A choisira par conséquent de voter C (voter C permettant de faire aussi bien dans un cas et mieux dans l'autre, voter pour A est une stratégie dominée (non strictement)). On considère maintenant le choix du joueur 3 qui sait à ce stade que 1 vote A et 2 vote C. S’il vote pour son premier choix (B), les trois options sont ex aequo et c’est A qui l'emporte (tie break du président) ; si maintenant il vote pour son second choix (C), C l’emporte. Comme le joueur 3 préfère C à A, il choisira de voter C. **Une analyse stratégique de la situation montre donc que le choix collectif se portera sur l’option C, ce qui correspond au dernier choix du président.** Le privilège que constitue sa voix prépondérante s’est ainsi retourné contre lui.

Ce jeu de vote peut également se résoudre au moyen de l'équilibre de Nash dont on peut vérifier (voir tableau 3 page suivante) qu'ils sont au nombre de cinq : (A,A,A), (B,B,B), (C,C,C), (A,A,B) et (A,C,C) (le premier élément du vecteur précise le vote du joueur 1, le second celui du joueur 2, le troisième celui du joueur 3). Les trois premiers résultats semblent peu convaincants, notamment parce qu’ils font voter un suffragant pour son dernier choix. Dans ces conditions, la discussion doit porter sur les deux derniers et, dans la mesure où une majorité de votants préfère C à A, il semble vraisemblable que ce soit l’équilibre (A,C,C) qui soit joué, au bout du compte, par les joueurs. On soulignera également que le profil (A,C,B) qui décrit une situation dans laquelle chacun vote pour l'alternative qu'il préfère n’est pas en équilibre de Nash. En particulier, dans un tel cas de figure, sachant que 1 vote pour A et 2 vote pour C, il n'est pas optimal pour le joueur 3 de voter pour B mais pour C (en agissant de la sorte, c'est en effet C et non pas A qui l’emporte, ce qui a la préférence du joueur 3). Voter sincèrement n’est donc pas une attitude qui devrait être adoptée par des joueurs rationnels.

Profils	MR – 1	MR – 2	MR – 3
AAA	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$
AAB	$\{\mathbf{A},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$
AAC	$\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$	$\{\mathrm{C}\}$	$\{\mathrm{C}\}$
…			
ACB	$\{\mathrm{A}\}$	$\{\mathrm{A},\mathrm{C}\}$	$\{\mathrm{C}\}$
ACC	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{C}\}$
BAA	$\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}$	$\{\mathrm{A},\mathrm{C}\}$	$\{\mathrm{B}\}$
…			
BBB	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$
…			
CCC	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$

Tableau 3 : équilibres de Nash du Chairman'sparadox

B) Le duopole de Cournot (1838)

Le duopole de Cournot s'intéresse au fonctionnement d'un marché sur lequel deux firmes, 1 et 2, se font concurrence par les quantités (avec un prix p qui est fixé de façon à garantir l'équilibre entre l'offre et la demande). Le modèle de base considère une demande linéaire $Q^d(p) = \alpha - p$, avec α un paramètre, et des fonctions de coût de la forme $C_i(q_i) = cq_i$, $i = 1{,}2$, avec q_i la production de la firme i et c le coût unitaire de production (supposé constant). Chaque firme décide de sa production de façon à maximiser son profit $\Pi_i(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - q_2)q_i - cq_i$ et ce sans connaître le choix de sa rivale[28]. L'équilibre de Nash de ce jeu correspond alors à un couple de productions (q_1^*, q_2^*) tel que q_1^* maximise le profit de 1 si 2 produit q_2^* et réciproquement. On le détermine en résolvant un système d'équations $q_1 = R_1(q_2)$ et $q_2 = R_2(q_1)$ avec $R_1(q_2) = (\alpha - c - q_2)/2$ et $R_2(q_1) = (\alpha - c - q_1)/2$ les fonctions de meilleure réponse des firmes 1 et 2, ces dernières donnant la production optimale de la firme i, $i = 1{,}2$, pour chaque niveau de production mis sur le marché par la rivale. On

[28]Si 1 et 2 mettent $q_1$et q_2, la production globale se fixe à $Q = q_1 + q_2$ et le prix qui permet d'équilibrer le marché est donné $p = \alpha - Q = \alpha - q_1 - q_2$.

obtient ainsi un équilibre symétrique $q_1^* = q_2^* = (\alpha - c)/3$ avec un prix d'équilibre $p^* = (\alpha + 2c)/3$ et des profits $\Pi_1^* = \Pi_2^* = (\alpha - c)^2/9$. Cet équilibre se révèle alors ne pas être optimal au sens de Pareto, au sens privé du terme c'est-à-dire en se préoccupant des seuls intérêts des joueurs, en étant notamment dominé par un profil en lequel chacun met la moitié de la production de monopole (soit $(q_1, q_2) = ((\alpha - c)/4, (\alpha - c)/4)$). On notera que, dans le cadre d'un jeu répété où l'on joue à plusieurs reprises au duopole de Cournot, les firmes peuvent, sous certaines conditions, réussir à jouer cet équilibre de monopole. On parle alors de **collusion tacite**.

C) Le jeu de l'inspection

Un employé, dénommé également l'Agent, travaille pour le compte d'un employeur ou Principal. L'Agent peut soit ne rien faire ($e = 0$), soit travailler ($e = 1$) tandis que le Principal peut inspecter ($i = 1$) ou ne pas inspecter ($i = 0$). Le fait de travailler coûte à l'Agent g (g rend compte de la désutilité du travail) et produit un output de v pour le Principal (a contrario, la production est nulle si $e = 0$). Une inspection coûte quant-à-elle h et permet d'apporter la preuve que l'Agent a, le cas échéant, tiré au flanc. Le Principal verse à l'Agent un salaire w (exogène) sauf s'il a la preuve que l'Agent n'a pas travaillé auquel cas il ne verse rien. Les joueurs choisissent leurs stratégies simultanément et l'on suppose que $v > w > g > h > 0$.

Notant $S_1 = \{0,1\}$ et $S_2 = \{0,1\}$ les ensembles de stratégies des joueurs 1 et 2, la bi-matrice des règlements associée à ce jeu est donnée par le tableau (12).

	$i = 0$	$i = 1$
$e = 0$	$\underset{+}{w}, -w$	$0, \underset{+}{-h}$
$e = 1$	$w - g, \underset{+}{v - w}$	$\underset{+}{w - g}, v - w - h$

Bi-matrice 12

Les conditions sur les paramètres du problème font que :

$$u_1(0,0) = w > u_1(1,0) = u_1(1,1) = w - g > u_1(0,1) = 0$$

$$u_2(1,0) = v - w > u_2(1,1) = v - w - h > u_2(0,1) = -h > u_2(0,0) = -w$$

On décrit donc une situation dans laquelle (*i*) le Principal a intérêt à ce que l'Agent travaille (car $v > w$), (*ii*) le Principal préfère inspecter si l'Agent ne travaille pas (dans le cas contraire, il doit lui verser son salaire) et ne pas l'inspecter s'il travaille (dans ce cas, il économise le coût de l'inspection), (*iii*) l'Agent préfère travailler si le Principal inspecte et tirer au flanc s'il n'inspecte pas et (*iv*) l'Agent est indifférent entre être ou ne pas être inspecté s'il fournit l'effort. On notera également que, la relation entre le niveau d'effort et le résultat étant (ici) univoque, le Principal sait toujours *ex post* si l'Agent a ou non travaillé mais il doit, dans tous les cas de figure, lui verser son salaire si jamais il n'a pas inspecté. Reprenant le vocabulaire de la théorie des contrats, l'hypothèse implicite est qu'il n'est pas possible de conditionner le salaire sur la valeur du résultat et/ou le niveau d'effort car ces variables ne sont pas o.e.v. (o.e.v. pour observable et vérifiable).

Par la suite, le calcul des meilleures réponses montre que ce jeu n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Le jeu étant fini, on sait toutefois qu'il admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes que l'on se propose à présent de déterminer. A ces fins, on note p la probabilité que l'Agent tire au flanc et q la probabilité d'inspection. Le règlement espéré du joueur 1 est alors donné par[29] :

$$V_1(p, q) = p(1 - q)w + (1 - p)(w - g)$$

tandis que celui du joueur 2 vérifie :

$$V_2(p, q) = (1 - p)(v - w) - p(1 - q)w - qh$$

La dérivée $\partial V_1/\partial p$ étant donnée par $\partial V_1/\partial p = (1 - q)w - (w - g)$, la maximisation du règlement espéré du joueur 1 par rapport à $p \in [0,1]$ se réalise en :

[29] Cette équation se comprend bien. Ainsi, l'Agent lorsqu'il travaille, ce qui survient avec une probabilité $1 - p$, est certain de percevoir un règlement constitué de son salaire net de la désutilité du travail $w - g$, cela que le Principal inspecte ou n'inspecte pas. Si maintenant l'Agent tire au flanc, ce qui survient avec une probabilité p, il ne percevra rien si le Principal inspecte, ce qui survient avec une probabilité q, tandis que son salaire lui sera versé si le Principal n'inspecte pas, ce qui survient avec une probabilité $1 - q$.

$$p^*(q) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq q < g/w \\ [0,1] & si \quad q = g/w \\ 0 & si \quad g/w < q \leq 1 \end{cases}$$

Cette meilleure réponse, en stratégie mixte, du joueur 1 s'interprète alors de façon simple. Ainsi, s'il y a beaucoup de chances pour que le Principal inspecte, beaucoup de chances au sens où la probabilité d'inspection q est supérieure au seuil g/w, l'Agent fournit l'effort. A l'inverse, si l'inspection est peu vraisemblable, peu vraisemblable au sens où la probabilité d'inspection q est inférieure à g/w, l'Agent tire au flanc. Pour finir, lorsque la probabilité d'inspection est précisément égale à g/w, on a :

$$V_1\left(1, \frac{g}{w}\right) = \left(1 - \frac{g}{w}\right)w + \frac{g}{w} \times 0 = w - g = V_1\left(0, \frac{g}{w}\right)$$

et l'agent est indifférent entre travailler ou ne pas travailler. Par la suite, n'importe quelle combinaison convexe $\lambda V_1\left(0, \frac{g}{w}\right) + (1-\lambda)V_1\left(1, \frac{g}{w}\right)$ donnant elle-aussi un règlement de $w - g$, l'Agent est également indifférent entre n'importe laquelle de ses stratégies mixtes $\sigma_1 = (p, 1-p), p \in [0,1]$.

En ce qui concerne à présent la maximisation du règlement du Principal, la dérivée $\partial V_2/\partial q$ étant donnée par $\partial V_2/\partial q = pw - h$, on a[30]:

$$q^*(p) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq p < h/w \\ [0,1] & si \quad p = h/w \\ 1 & si \quad h/w < p \leq 1 \end{cases}$$

La représentation de ces meilleures réponses dans le plan (p, q) permet d'établir que l'équilibre de Nash en stratégies mixtes est donné par $(p^*, q^*) = (h/w, g/w)$ (avec de plus $q^* > p^*$ car $g > h$ et le Principal inspecte plus souvent que l'Agent ne tire au flanc). Ce jeu

[30]Cette meilleure réponse s'interprète là aussi de façon claire. Ainsi, s'il y a beaucoup de chances pour que l'Agent tire au flanc, le Principal inspecte et il s'abstient de le faire s'il est vraisemblable que l'Agent travaille. Pour finir, en la valeur seuil $p = h/w$, le Principal est indifférent entre inspecter ou ne pas inspecter et, de façon plus générale, en n'importe quelle stratégie mixte $\sigma_2 = (1-q, q)$, sa fonction objectif étant linéaire en q.

de l'inspection présente alors deux grandes propriétés. La première est que son équilibre n'est pas optimal au sens de Pareto. Les règlements d'équilibre étant donnés par :

$$V_1^* = w - g$$

$$V_2^* = (1 - \frac{h}{w}) \times v - w$$

jouer les stratégies pures $(e, i) = (1,0)$, i.e. les stratégies mixtes dégénérées $\sigma_1 = (p, 1-p) = (1,0)$ et $\sigma_2 = (q, 1-q) = (0,1)$, permet en effet d'améliorer le règlement du Principal (qui passe de $(1-p^*)v - w$ à $v - w$) sans dégrader celui du joueur 2 (qui se maintient à $w - g$). Le second est qu'il existe, du point de vue du Principal, un niveau de salaire optimal. On a en effet :

$$\frac{\partial V_2^*}{\partial w} = -\frac{\partial p^*}{\partial w} v - 1 = \frac{h}{w^2} v - 1 \geq 0 \Leftrightarrow w \leq \sqrt{hv}$$

et le règlement du Principal, en étant croissant à gauche de $w^* \equiv \sqrt{hv}$ et décroissant à droite, admet son maximum en $w = w^* \equiv \sqrt{hv}$. Comme apparent, l'existence de ce salaire optimal, dénommé **salaire d'efficience** dans la littérature, tient à ce qu'une augmentation de salaire, si elle réduit le profit (espéré) en alourdissant le coût (espéré) du travail, augmente en contrepartie le profit (espéré) car elle réduit la probabilité de tirer au flanc $p^* = h/w$ de l'Agent et, ce faisant, augmente la production (espérée) $E[\tilde{v}] = (1-p^*)v$.

D) Le duopole de Stackelberg (1934)

Reprenant les données du duopole de Cournot, on suppose à présent que la firme 1 joue la première, suite à quoi la firme 2 détermine à son tour son niveau de production et ce après avoir observé le choix de sa rivale. Cette situation dans laquelle la firme 1 joue le rôle de leader forme un jeu dynamique à information parfaite que l'on résout au moyen de l'équilibre parfait. A ces fins, on se place à la fin du jeu et on détermine, pour chaque niveau de production de la firme 1, la production optimale de la firme 2. Cette fonction est alors connue car elle correspond à la meilleure réponse de la firme 2, $R_2(q_1) = (\alpha - c - q_1)/2$, calculée dans le duopole de Cournot. Puis, connaissant dans chaque sous-jeu le choix optimal de la firme 2, on remonte d'un cran et l'on examine le problème de décision de la firme 1. Comme 1 sait que 2 jouera $q_2 = R_2(q_1)$ si elle joue q_1, 1 tient compte de ce comportement de 2 et sélectionne un niveau de production de façon à maximiser $\Pi_1(q_1, R_2(q_1))$. On obtient ainsi $q_1^s = (\alpha - c)/2$, puis par cascade $q_2^s = (\alpha - c)/4$. La production globale, le prix et les profits se fixent alors à $Q^s = 3(\alpha - c)/4$, $p^s = (\alpha + 3c)/4$, $\Pi_1^s = (\alpha - c)^2/8$, $\Pi_2^s = (\alpha - c)^2/16$ et cet équilibre demeure dominé au sens de Pareto (une réduction de moitié de la production de la firme 1 permet d'augmenter le profit de la firme 2 sans modifier celui de la firme 1). Un point remarquable est alors que le duopole de Stackelberg est plus favorable pour les consommateurs que le duopole de Cournot (la production est plus importante et le prix de vente est plus faible), ce qui est paradoxal dans la mesure où la structure de marché la plus concurrentielle semble bien être initialement celle de Cournot.

VII – Conclusion

En dépit de certaines de leurs limites, révélées par l'analyse expérimentale, les concepts de solution de la TDJ sont désormais incontournables dans (presque) tous les domaines de l'économie. C'est sans doute en Economie Industrielle que son impact a été le plus considérable mais elle est également très présente en Economie du travail, en Economie Publique, …, en théorie des Enchères et en théorie du Vote. Le rôle central qu'elle joue aujourd'hui en sciences économiques a été reconnu, en quelque sorte officiellement, par la remise du prix Nobel d'économie à Nash, Selten et Harsanyi en 1994, puis à Schelling et Aumann en 2005. Aujourd'hui, la discipline continue à se développer et porte l'attention sur le rôle joué par les asymétries d'information (théorie des contrats) qui remettent en cause le bon fonctionnement des marchés.

VIII – Annexe

On considère le jeu suivant dans lequel chaque joueur dispose de trois stratégies (a, b et c pour le joueur 1, x, y et z pour le joueur 2). Ce jeu admet un unique équilibre de Nash : le profil $(s_1^*, s_2^*) = (c, z)$.

	x	y	z
a	$0, \underset{+}{4}$	$\underset{+}{4}, 0$	$5, 3$
b	$\underset{+}{4}, 0$	$0, \underset{+}{4}$	$5, 3$
c	$3, 5$	$3, 5$	$\underset{+}{6}, \underset{+}{6}$

Bi-matrice 13

Par la suite et similairement à ce qui est exposé dans le texte, on suppose à présent que les joueurs jouent à tour de rôle et sélectionnent de façon myope, après avoir observé ce qui vient d'être joué par l'autre joueur, une action leur permettant de maximiser leur règlement courant. Partant alors du point initial (c, x) et en considérant que le joueur 2 commence, on obtient la séquence $(c, x) \rightarrow (c, z) \rightarrow (c, z) \rightarrow (c, z) \rightarrow \cdots$, i.e. une fois que l'on atteint le profil (c, z), on y reste avec des joueurs qui le jouent alors indéfiniment. L'équilibre de Nash apparaît donc bien comme l'équilibre stationnaire de ce processus. Une difficulté toutefois est que rien ne garantit que l'on converge bien vers cet équilibre. Ainsi :

- Si l'on modifie légèrement le processus en considérant que c'est le joueur 1 (et non le joueur 2) qui commence, on obtient un cycle-limite avec :

$$\begin{array}{ccccc} (c, x) & \rightarrow & (b, x) & \rightarrow & (b, y) \\ & & \uparrow & & \downarrow \\ & & (a, x) & \leftarrow & (a, y) \end{array}$$

- De même si l'on maintient l'hypothèse selon laquelle le joueur 2 commence mais en considérant à présent que le point initial est donné par (b, x):

$$\begin{array}{ccc} (b, x) & \rightarrow & (b, y) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (a, x) & \leftarrow & (a, y) \end{array}$$

ce qui établit que l'équilibre stationnaire (c, z) n'est pas globalement stable pour la règle d'ajustement considérée.

- De même si l'on maintient le point de départ (soit (c,x)) et si l'on modifie la règle d'ajustement en considérant que 1 et 2 réagissent de façon simultanée en anticipant que l'autre ne modifie pas son choix (conjecture dite de Cournot) :

$$\begin{array}{ccc} (c,x) & \rightarrow & (b,z) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (a,z) & \leftarrow & (c,y) \end{array}$$

On peut toutefois s'interroger sur la pertinence des conjectures de Cournot dans la mesure où les joueurs se trompent à chaque fois et ne tirent pas la leçon de leurs erreurs.

IX – Bibliographie

Binmore K. (1992), Fun and Games, A Text on Game Theory, D.C. Health and Company, traduit en français chez De Boeck Université.

Cahuc P. (1993), La nouvelle microéconomie, Collection Repères, La Découverte, n°126.

Carmichael F. (2005), A Guide to Game Theory, Pearson Education.

Cayatte J.L. (1994), Introduction à l'économie de l'incertitude, De Boeck Université.

Cooper R., D.V. DeJong, R. Forsythe & T. Ross (1993), "Forward induction in the battle of the sexes games", American Economic Review 83, pp. 1303-1316

Cournot A.A. (1938), Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Paris, Hachette

Daskalakis C., P. W. Goldberg, et C. H. Papadimitriou (2009). "The complexity of computing a Nash equilibrium". Communications of the ACM, 52(2): 89–97.

Dehez P. (2007), Conflit, marchandage, partage et pouvoir, Une introduction à la Théorie des Jeux, *mimeo*, disponible à http://perso.uclouvain.be/pierre.dehez/Documents/Manuscript.pdf.

Demange G. & J.P. Ponssard (1994), Théorie des jeux et analyse économique, Collection Economie, Presses Universitaires de France.

Diamond D. & Dybvig P. (1983), « *Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity* », Journal of Political Economy, 91, pp. 401-19.

Dixit A. & Skeath S., (2004), Games of Strategy, Norton, New York.

Fabrikant A., C.H. Papadimitriou and K. Talwar (2004). "The Complexity of Pure Nash Equilibria,". In the 36th ACM Symposium on Theory of Computing, STOC 2004.

Friedman J.W. (1977), Oligopoly and the Theory of Game, North Holland.

Friedman J.W. (1986), Game Theory with Applications to Economics, Oxford University.

Fudenberg D. & J. Tirole (1992), Game Theory, MIT Press.

Gardner R. (1995), Games for Business and Economics, John Wiley & Sons, Inc. 1995

Gabszewicz J. (1994), La concurrence imparfaite, Collection Repères, La Découverte, n°146.

Gibbons R. (1994), A Primer in Game Theory, Harvester and Wheatsheaf.

Guerrien B. (1993), La théorie des jeux, Collection Economie Poche, Economica.

Guth W, R. Schmittberger & B. Scharze (1982), "*An experimental analysis of ultimatum bargaining*", Journal of Economic Behavior & Organization 3, pp. 367-388

Hargreaves Heap S.P. & Y. Varoufakis (1995), Game Theory, a Critical Introduction, Routledge.

Kreps D.M. (1990), Game Theory and Economic Modelling, Clarendon Lectures in Economics, Clarendon Press, traduit en français chez Dunod, Collection Théories Economiques.

Kreps D.M. (1990), A Course in Microeconomic Theory, Harvester and Wheatsheaf, *cf.* en particulier la partie III (Noncooperative game theory).

Luce R.D. & Raiffa H. (1957), Games and Decisions, John Wiley and Sons, New York.

McKelvey R. & R. Palfrey (1992), "*An experimental study of the centipede game*", Econometrica 60, pp. 803-836

McKelvey R. D. et A. McLennan (1996). "Computation of equilibria in finite games". Handbook of Computational Economics, 1: 87–142.

Mas-Colell A., M.D. Whinston & J.R. Green (1995), Microeconomic Theory, Oxford University Press, *cf.* en particulier la partie II (Game Theory).

Myerson R. (1991), Game Theory, Analysis of conflict, Harward University Press.

Nash J. F. (1950), « *Equilibrium Points in N-Person Games* », Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 36, 48-49.

Nash J.F. (1951), « *Non-Cooperative Games* », Annals of Mathematics, 54, 286-295.

Osborne M. & A. Rubinstein (1994), A Course in Game Theory, MIT Press.

Palacios-Huerta I. & O. Volij (2009), « *Field Centipedes*», American Economic Review 99, pp. 1619-1635

Pénard T. (2004), La théorie des Jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques, *mimeo*, disponible à http://perso.univ-rennes1.fr/thierry.penard/biblio/manueljeux.pdf.

Rosenthal R.W. (1981), « *Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox* », Journal of Economic Theory, 25, pp. 92-100.

Rubinstein A. (1999), « *Experience from a course in game theory: Pre and post-class problem sets as a didactic device* », Games and Economic Behavior, 28, pp. 155-170

Schelling T.C. (1960), The Strategy of Conflict, Cambridge, Harvard University Press.

Shubik M. (1982), Game Theory in the Social Sciences – Concepts and Solutions, MIT Press, traduit en français chez Economica.

Stackelberg H. von (1934), Marktform und Gleichgewicht, Julius Springer, Vienne.

Varian H.R. (1992), Microeconomic analysis, Norton International Student Edition, *cf*. en particulier les chapitres 15 (Game Theory) et 16 (Oligopoly), traduit en français chez De Boeck Université.

Von Neumann J. et Morgenstern O. (1944), Theory of Games and Economic Behavior, John Wiley and Sons, New York.

Zermelo E. (1913), « *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* », pp. 501-504, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Volume II, Cambridge University Press.