LE SYSTÈME DE VOTE PAR NOTE À TROIS NIVEAUX : ÉTUDE AXIOMATIQUE D'UN NOUVEAU MODE DE SCRUTIN

HATEM SMAOUI ET DOMINIQUE LEPELLEY

CEMOI, Université de La Réunion [1]

Résumé. Le but de ce travail est d'explorer les propriétés théoriques de la procédure de vote par note à trois niveaux. Nous confrontons ce nouveau mode de scrutin, proposé par Felsenthal (1989) et Hillinger (2004a), à un ensemble de critères normatifs généralement retenus par les théoriciens du vote comme étant des conditions « souhaitables » qui garantissent la cohérence et la pertinence du choix collectif. Ces conditions, traditionnellement définies dans le contexte des préférences ordinales, seront d'abord adaptées à un cadre formel plus compatible avec la notion de vote par évaluation.

Abstract. The purpose of this work is to explore the theoretical properties of the three-valued scale evaluative voting procedure. We confront this new election method, proposed by Felsenthal (1989) and Hillinger (2004a), with a set of normative criteria generally considered by voting theorists as "desirable" conditions that guarantee the consistency and the relevancy of the collective choice. We first adapt these conditions, traditionally defined in the context of ordinal preferences, to a formal framework more compatible with the notion of evaluative voting.

Mots-clés : théorie du vote, agrégation des préférences, vote par évaluation.
Classification JEL : D71, D72.

1. Introduction

Les procédures électorales sont très souvent formalisées et étudiées dans un contexte ordinal où chaque votant est supposé être capable de classer par ordre de préférence l'ensemble des options soumises à la décision collective. Cette approche ordinale des préférences individuelles, dominante en théorie du choix social, est contestée par des auteurs tels que Hillinger (2004a) et Balinski et Laraki (2007) qui y voient la source principale de la plupart des paradoxes de vote. Ces auteurs rejettent les systèmes de vote par classement et proposent comme alternative des méthodes d'agrégation basées sur le principe d'évaluation : une échelle (finie) de valeurs est fixée et les votants sont invités à évaluer l'ensemble des candidats en se référant à cette échelle. Les valeurs proposées sont généralement des nombres entiers formant une progression arithmétique (par exemple des notes entre 0 et 10), l'électeur peut alors exprimer son opinion dans ce contexte cardinal en attribuant

1. CEMOI, université de La Réunion, FDE, Campus du Moufia, 97400 Saint-Denis, France (e-mail : smaouihatem@yahoo.fr, dominique.lepelley@univ-reunion.fr). Cette étude a été en partie réalisée au Bureau d'Économie Théorique et Appliquée (BETA), Université Louis Pasteur-Strasbourg I. Elle fait partie d'un projet sur l'expérimentation du vote par note et du vote par approbation, financé par le Centre d'Analyse Stratégique. Pour plus détails sur ce projet, voir le rapport final (Baujard et Igersheim, 2007).

une note à chaque candidat [2]. Plusieurs modes de calcul peuvent être envisagés pour déterminer les résultats produits par ces méthodes dites de vote par évaluation (par note, par valeur). Hillinger propose de fonder la décision collective sur le principe utilitariste qui consiste à additionner les notes attribuées par les votants à chaque candidat et à élire les options qui obtiennent le total le plus élevé [3]. Le vote par approbation (ou par assentiment), introduit notamment par Brams et Fishburn (1983) et par Weber (1995), peut être regardé comme l'exemple le plus simple de ces systèmes de vote par note : l'électeur vote pour (approuver) un ou plusieurs candidats, le vainqueur est le candidat qui a reçu le plus d'assentiments. Il est clair que cette procédure n'est autre que la méthode de vote par évaluation utilisant une échelle composée de deux notes (1 et 0 par exemple). Il existe évidement autant de système de vote par note que d'échelles d'évaluation, c'est-à-dire une infinité de choix possibles. Hillinger (2004a), qui défend le vote par note comme étant le cadre adéquat de la décision collective, opte clairement pour une échelle d'évaluation à trois niveaux. Cette méthode, qu'il note $EV3$ (abréviation du terme anglais "Evaluative Voting"), peut être définie à partir des échelles numériques $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 0)$, ou n'importe quel autre système d'évaluation équivalent [4].

Une procédure équivalente à la méthode $EV3$ a été suggérée par Felsenthal (1989) comme une extension du vote par assentiment. Il s'agit d'une combinaison du vote par approbation et du « vote par désapprobation » : pour chaque option, les électeurs ont le choix entre trois stratégies : approuver, désapprouver ou s'abstenir. Le score d'une option est défini par le nombre d'assentiments diminué du nombre d'avis défavorables, les options gagnantes sont celles qui obtiennent le score le plus élevé.

Ce système de vote par évaluation à trois niveaux a récemment fait l'objet d'une expérience menée par un groupe de chercheurs en sciences économiques des Universités de Caen, de Strasbourg et du CNRS : il a été testé (avec le vote par approbation) dans trois communes en Alsace, Normandie et Pays de la Loire, le jour du premier tour de l'élection présidentielle de 2007, à la sortie des bureaux de vote. Le but de l'expérimentation était de proposer de nouveaux modes de scrutin et de comparer les résultats de vote et les comportements des électeurs face à trois procédures électorales : le scrutin uninominal à deux tours, le vote par approbation et le vote par note à trois niveaux [5]. Ces deux dernières méthodes permettent d'éviter le dilemme entre le vote « utile » et le vote « sincère », inhérent au scrutin majoritaire. L'électeur, n'étant pas contraint à un choix unique, a la possibilité d'exprimer ses convictions (même si elles ne sont partagées que par une minorité) tout en votant pour des candidats qui ont des chances de l'emporter. En plus de sa

2. L'échelle d'évaluation peut aussi correspondre à des degrés d'appréciation (excellent, bon, moyen, médiocre, ...) qui, au dépouillement, seront transformés en nombres réels, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par les différentes options.

3. Balinski et Laraki (2007) proposent un mode opératoire plus complexe qui repose sur le calcul, pour chaque option, de la valeur médiane des notes obtenues.

4. La méthode $EV3$, comme toutes les procédures de vote par note, est invariante par transformation affine positive de l'échelle d'évaluation.

5. Cette expérience fait partie d'un projet financé par le Centre d'Analyse Stratégique dans le cadre de son programme de travail sur l'organisation des consultations électorales (voir Baujard et Igersheim, 2007, 2009). Elle s'inscrit dans la lignée de l'expérience menée lors du premier tour des élections présidentielles de 2002, par Balinski, Laraki, Laslier et Van der Straeten (voir Laslier et Van der Straeten, 2004).

simplicité, la méthode $EV3$ offre aux votants une plus grande flexibilité dans la manière avec laquelle ils peuvent exprimer leurs choix. L'échelle d'évaluation $(2, 1, 0)$ peut, en effet, être interprétée de diverses manières par les électeurs : ils peuvent l'utiliser comme dans un scrutin uninominal (en accordant un 2 au candidat préféré et des 0 à tous les autres), comme dans un vote par assentiment (soutenir certains candidats et en écarter d'autres), ou encore exprimer l'intensité de leurs préférences en utilisant les trois notes.

Felsenthal et Hillinger sont, à notre connaissance, les deux seuls auteurs à avoir proposé et étudié le vote par évaluation à trois niveaux. Felsenthal (1989) s'est intéressé, dans le cas d'un petit groupe de votants, aux possibilités de manipulation de cette méthode. Il a montré que lorsque l'information est parfaite et lorsque les votants sont rationnels, le résultat collectif est identique à celui du vote par assentiment [6]. Hillinger (2004a, 2004b, 2004c, 2005) présente, dans un cadre « utilitariste », des propriétés générales communes à toutes les procédures de vote par note. Il motive son choix de la méthode $EV3$ par un ensemble d'arguments « pragmatiques » sur l'interprétation que les votants peuvent avoir de l'échelle proposée et leur capacité à donner un sens aux différents niveaux d'évaluation [7]. Nous nous proposons, à travers ce travail, de poursuivre l'exploration des propriétés de ce nouveau mode de scrutin en le confrontant à un ensemble de critères normatifs (principes majoritaires, monotonie, consistance, etc) généralement retenus par les théoriciens du vote comme étant des conditions « souhaitables » qui garantissent la cohérence et la pertinence du choix collectif. [8] Ces conditions, traditionnellement définies dans le contexte des préférences ordinales, doivent d'abord être adaptées à un cadre formel plus compatible avec la notion de vote par évaluation.

2. Préférences trichotomiques, fonctions d'agrégation trichotomiques

Les systèmes de vote par classement font appel aux préférences ordinales des votants. Ces préférences individuelles sont traditionnellement représentées par des relations d'ordre (complètes et transitives) définies sur l'ensemble des candidats. Ce contexte ordinal ne permet pas de juger (ou d'apprécier) les différentes options de manière indépendante : le rang occupé par un candidat, dans un ordre de préférence individuelle, dépend du nombre de candidats qui lui sont préférés. De la même manière, l'intensité de préférence (ou la distance) entre deux options, définie par le nombre d'options intermédiaires, peut changer lorsque des options sont introduites ou supprimées. Le caractère dépendant de l'échelle (de préférence) ordinale est la source de la plupart des imperfections des procédures d'agrégation par classement. L'un des défauts commun à toutes ces méthodes est le viol de la condition d'indépendance par rapport aux options non pertinentes qui exige que le classement collectif de deux options ne dépende que des préférences individuelles sur cette paire d'options. Le recours à une échelle (d'évaluation) cardinale permet

---

6. L'auteur montre aussi que, pour chaque votant, la probabilité d'être décisif est plus grande avec cette procédure qu'avec le vote par assentiment.

7. Pour Hillinger, la plage de valeurs $(+1, 0, -1)$ est la plus appropriée au contexte du vote : pour chaque option, les électeurs ont la possibilité de voter pour $(+1)$, contre (-1), ou être neutres (0). Une échelle plus discriminante serait, selon lui, mal assimilée et mal utilisée par les électeurs qui, généralement, ne disposent pas d'assez d'informations pour porter des jugements plus précis

8. Ces résultats normatifs sont complétés par une analyse probabiliste (présentée en appendice) permettant d'évaluer "l'efficacité majoritaire" du vote par note à trois niveaux.

de surmonter cette difficulté, puisque la note accordée à un candidat ne dépend pas des notes obtenues par ses concurrents. Dans ce cas, les votants expriment leurs opinions, non pas par un classement, mais à travers une partition de l'ensemble des candidats en plusieurs catégories, correspondant chacune à un niveau (ou degré) d'appréciation.

De manière plus formelle, considérons un ensemble X de m candidats ($m \geq 2$) et un ensemble N de n votants ($n \geq 1$). Pour un individu i dans N, notons P_i (resp. I_i) sa relation de préférence stricte (resp. sa relation d'indifférence) sur X. Soit k un nombre entier supérieur ou égal à 1. Les préférences de l'individu i sont dites *k-chotomiques* si les m candidats peuvent être répartis sur (au plus) k sous-ensembles de X, $A_1 \ldots A_k$, tels que :

- Pour tout r ($1 \leq r \leq k$), i est indifférent entre les options de A_r :
  $\forall x, y \in A_r, xI_iy$.
- Pour tous r, s ($1 \leq r < s \leq k$), i préfère strictement toute option de A_r à toute option de A_s :
  $\forall x, y \in X, (x \in A_r, y \in A_s \text{ et } r < s) \Rightarrow xP_iy$.

Lorsque $k = 1$, l'individu est dit non concerné (par le vote) : il est indifférent entre tous les candidats. Pour $k = 2$, les préférences sont dites dichotomiques : les options sont séparées en deux classes d'indifférence, elles sont soit « bonnes » soit « mauvaises ». L'individu fait preuve de préférences trichotomiques pour $k = 3$ (et multichotomiques pour $k \geq 4$) [9].

En admettant que toutes les préférences individuelles sont dichotomiques, le vote par approbation se montre, en de nombreux points, supérieur à tous les autres modes de scrutin (Brams et Fishburn, 1983). Il est, par exemple, la seule procédure électorale non manipulable (l'électeur a intérêt à voter sincèrement, c'est-à-dire pour les candidats appartenant à sa première classe d'indifférence). Il garanti l'élection, lorsqu'il existe, du vainqueur de Condoret (candidat qui bat tous ses concurrents dans des duels majoritaires) et prévient contre la sélection d'un éventuel perdant de Condorcet (candidat qui perd toutes les confrontations à la majorité). D'autres avantages de ce système de vote ont été mis en évidence par de nombreuses caractérisations axiomatiques (voir par exemple Fishburn, 1978a, 1978b ; Sertel, 1988 et Alòs-Ferrer, 2006). Cependant, lorsque les votants n'ont pas (tous) des préférences dichotomiques, le vote par assentiment peut présenter de sérieux défauts (Niemi, 1984 ; Saari et Van Newenhizen, 1988). L'hypothèse des préférences dichotomiques semble, en fait, peu réaliste et trop contraignante : Par exemple, en présence de trois options x, y et z, les individus qui préfèrent strictement x à y et y à z sont contraints à choisir (arbitrairement) entre deux alternatives : voter pour x ou approuver x et y. Yilmaz (1999) a proposé une méthode alternative au vote par assentiment, définie dans un contexte qui fait appel aux préférences trichotomiques. L'électeur réparti les candidats en trois catégories : « approuvés », « acceptables » ou « désapprouvées ». C'est ce cadre, plus large, des préférences trichotomiques que nous retenons pour étudier le comportement du vote par note à trois niveaux face aux différentes conditions normatives.

Nous supposons donc que la préférence de l'individu i peut être décrite par une partition T_i de l'ensemble X en trois classes d'indifférence : $T_i = (A_i, B_i, C_i)$ avec $A_i \cup B_i \cup C_i = X$ (pour simplifier, nous noterons $T_i = A_iB_iC_i$). Les sous-ensembles A_i, B_i et C_i regroupent respectivement les options préférées par i, celles

9. Cette terminologie a été introduite par Brams et Fishburn (1983).

qu'il juge moyennes (ou acceptables) et celles qu'il apprécie le moins. Il est possible qu'une (ou deux) de ces trois classes soit vide, nous utiliserons alors la notation $-$ pour la désigner. Par exemple, avec cinq options ($X = \{a, b, c, d, e\}$), les partitions $T_1 = \{a, b\} - \{c, d, e\}$ et $T_2 = - \ \{a, b\}\{c, d, e\}$ correspondent à des préférences « dichotomiques » différentes. Nous désignons par R_i (resp. P_i et I_i) la relation d'ordre (resp. la composante asymétrique et la composante symétrique de cette relation) induite par la préférence trichotomique T_i. Un profil de taille n est une liste ordonnée (de n préférences individuelles) $\pi = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$. L'ensemble de tous les profils possibles sur X, lorsque la taille de la population (ensemble de votants) prend toutes les valeurs possibles, sera noté $D(X)$. Si π_1 et π_2 sont deux profils sur X correspondant à deux populations disjointes N_1 et N_2, la réunion des ces deux profils (définie comme une concaténation) sera notée $\pi_1 + \pi_2$. La notation $t\pi$ désignera le profil constitué de t répliques du profil π.

L'agrégation des préférences individuelles en une décision collective peut avoir comme objectif le classement (ou le rangement) global des candidats ou la sélection d'une ou de plusieurs options gagnantes. Dans l'optique de rangement, il s'agit de construire, à partir de chaque profil, un proèdre complet (classement total avec possibilité d'ex aequo) représentant la préférence collective. Un tel mécanisme sera appelé fonction (d'aggregation) trichotomique de classement (FTC) et peut être représenté formellement par une fonction de $D(X)$ dans $R(X)$, l'ensemble des pré-ordres complets sur X. Lorsque l'agrégation des préférences a pour but d'associer à chaque profil un choix collectif représenté par une partie non vide de l'ensemble des candidats, nous parlerons de fonction (d'aggregation) trichotomique de sélection (FTS) qui peut être décrite par une fonction de $D(X)$ dans $2^X \setminus \{\emptyset\}$, l'ensemble des parties non vides de X. La présentation formelle de certaines conditions normatives n'exige pas de distinguer le cas des FTC de celui des FTS, nous regroupons ces deux notions sous le terme de fonction d'agrégation trichotomique (ou simplement fonction d'agrégation).

Dans ce cadre formel, la procédure $EV3$ peut être regardée comme une fonction d'agrégation trichotomique définie à partir du vecteur-point $v = (2, 1, 0)$. Le score d'une option x (associée à un profil π et au vecteur v) sera défini par : $S_v(\pi, x) = 2 \times n_A(\pi, x) + 1 \times n_B(\pi, x) + 0 \times n_C(\pi, x)$. Dans cette formule, la notation $n_A(\pi, x)$ désigne le nombre d'individus pour qui l'option x figure dans la première classe d'indifférence, la catégorie A. Les nombres $n_B(\pi, x)$ et $n_C(\pi, x)$ se lisent de la même manière en se référant aux catégories B et C. En tant que FTC, cette méthode, notée f^E, associe à chaque profil π un préordre collectif $f^E(\pi)$ où la relation $xf^E(\pi)y$ (x est au moins aussi bon que y) est donnée par : $xf^E(\pi)y$ si et seulement si $S_v(\pi, x) \geq S_v(\pi, y)$. L'option x sera donc jugée meilleure que (ou strictement préférée à) l'option y si $S_v(\pi, x) > S_v(\pi, y)$, nous écrirons alors $xP(f^E(\pi))y$. De même, les deux options seront considérées comme équivalentes ($xI(f^E(\pi))y$) si $S_v(\pi, x) = S_v(\pi, y)$. Dans le contexte de sélection, la méthode $EV3$ correspond à la FTS g^E qui à chaque profil π associe un ensemble de vainqueurs $g^E(\pi)$ constitué des candidats qui obtiennent le plus grand score [10].

10. Dans la pratique, les votants évaluent directement les candidats en attribuant à chacun d'eux une note de 0, 1 ou 2 points. D'un point de vue théorique, il est clair que cette méthode est équivalente à la procédure $EV3$.

3. Propriétés du vote par note à trois niveaux

Le cadre de l'agrégation des préférences ordinales reste dominant en théorie du vote et en théorie des choix collectifs. Ceci explique la rareté des études théoriques consacrées au vote par évaluation en général et à la méthode $EV3$ en particulier. Nous proposons, dans ce qui suit, d'effectuer un premier pas vers une meilleure connaissance des avantages (et des défauts) de cette procédure par un examen des propriétés qu'elle satisfait en tant que fonction d'agrégation trichotomique.

3.1. **Neutralité, anonymat et unanimité.** Les deux premières conditions que toute procédure d'agrégation « démocratique » doit respecter sont les axiomes de neutralité (ne favoriser aucun candidat) et d'anonymat (ne favoriser aucun votant). Les définitions mathématiques de ces deux conditions minimales font appel à la notion de permutation. Soit E un ensemble fini, une permutation de E est une bijection de E dans lui même. On notera $S(E)$ l'ensemble des permutations de E. Si $T_i = A_iB_iC_i$ est une préférence individuelle trichotomique et σ une permutation dans $S(X)$, alors $\sigma(T_i)$ est la préférence obtenue à partir de T_i en permutant les options selon σ : $\sigma(T_i) = \sigma(A_i)\sigma(B_i)\sigma(C_i)$, où $\sigma(A_i)$, $\sigma(B_i)$ et $\sigma(C_i)$ sont les images respectives par σ des sous-ensembles A_i, B_i et C_i. Pour un profil π dans $D(X)$, $\sigma(\pi)$ est le profil obtenu en remplaçant dans π chaque préférence individuelle T_i par son image $\sigma(T_i)$. Pour un préordre complet R, $\sigma(R)$ est le préordre complet obtenu en appliquant σ : si $a = \sigma(x)$ et $b = \sigma(y)$, alors $a\sigma(R)b$ si et seulement si xRy.

• **Neutralité (N)** : Une fonction d'agrégation trichotomique F est neutre si, pour tout profil π dans $D(X)$ et pour toute permutation σ dans $S(X)$, $F(\sigma(\pi)) = \sigma(F(\pi))$.

Cette définition formelle englobe le contexte de rangement et celui de sélection : $F(\pi)$, $\sigma(F(\pi))$ et $F(\sigma(\pi))$ sont des préordres complets sur X dans le premier cas, et des sous-ensembles de X dans le deuxième cas. Il est facile de voir que *la méthode $EV3$ est neutre en tant que FTC et en tant que FTS* :

Montrons que f^E est neutre, une preuve similaire permet d'établir la neutralité de g^E. Simplifions la définition de la condition (N) en faisant appel aux transpositions. Il s'agit de permutations qui échangent deux éléments et laissent invariants touts les autres. Toute permutation étant un produit (de composition) fini de transpositions, la preuve peut se limiter au cas de ces permutations particulières. Soit π un profil dans $D(X)$ et σ la transposition des options a et b ($\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$ et ($\sigma(c) = c$ pour tout c dans $X \setminus \{a, b\}$). Les profils π et $\sigma(\pi)$ ne diffèrent (éventuellement) que par les positions des options a et b dans chaque préférence individuelle : si, dans π, a appartient à une classe d'indifférence Y et b appartient à une classe Z, alors, dans $\sigma(\pi)$, a se retrouve dans la catégorie Z et b dans la catégorie Y. Les nouveaux scores sont donc : $S_v(\sigma(\pi), a) = S_v(\pi, b)$ et $S_v(\sigma(\pi), b) = S_v(\pi, a)$ et $S_v(\sigma(\pi), c) = S_v(\pi, c)$ pour tout c autre que a et b. Ainsi, le préordre $f^E(\sigma(\pi))$ s'obtient, à partir du préordre $f^E(\pi)$, en échangeant les places de a et b, et en laissant invariantes les positions des autres options. D'où $f^E(\sigma(\pi)) = \sigma(f^E(\pi))$. □

Pour un profil π dans $D(X)$ défini pour un ensemble N de votants et une permutation θ dans $S(N)$, notons π^θ le profil qui résulte naturellement de π en renommant les éléments de N selon θ : si π est défini par $\pi = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, alors $\pi^\theta = (T_{\theta(1)}, T_{\theta(2)}, \ldots, T_{\theta(n)})$.

• **Anonymat (A)** : Une fonction d'agrégation trichotomique F est anonyme si pour tout profil π, défini pour un ensemble N de votants, et pour toute permutation θ dans $S(N)$, $F(\pi^\theta) = F(\pi)$.

Il est clair que l*a méthode EV3 est anonyme en tant que FTC et en tant que FTS* :

La preuve est triviale. L'idée est que les scores des options restent les mêmes lorsqu'une permutation est appliquée à l'ensemble N : le score d'une option étant défini comme la somme de toutes les notes obtenues, l'ordre dans lequel cette addition est effectuée n'a aucun effet sur le résultat final. □

La condition d'unanimité constitue le troisième axiome qui parait nécessaire à toute méthode d'agrégation « raisonnable » . Cette propriété, connue aussi sous le nom de principe de Pareto, indique que la décision collective ne doit pas contredire un avis unanime des votants.

• **Principe de Pareto (P)** : Une FTC f vérifie le principe de Pareto si pour tout profil défini sur N, $\pi = (T_i)_{i\in N}$, et pour tous x, y dans X,
(xR_iy, pour tout i dans N et $xP(R_j)y$ pour (au moins) un j dans N) $\Rightarrow xP(f(\pi))y$.

Ce principe peut s'étendre de manière naturelle au contexte de sélection : une FTS g satisfait la condition (P) si pour tout profil π et pour toutes options x, y dans X vérifiant les hypothèses de la définition ci-dessus, l'option y ne doit pas figurer parmi les vainqueurs ($y \notin g(\pi)$). *Le système de vote par note à trois niveaux vérifie le principe de Pareto (en tant que FTC et en tant que FTS)* :

Si, pour un profil π, tous les votants jugent le candidat x au moins aussi bon que le candidat y et si (au moins) l'un des votants trouve x meilleur que y, le score de x est supérieur (d'au moins un point) à celui de y. D'où $xP(f^E(\pi))y$ et $y \notin g^E(\pi)$. □

3.2. **Universalité, non-dictature et indépendance.** Ces propriétés constituent, avec le principe de Pareto, les quatre axiomes dont la conjonction conduit, dans le cadre des préférences ordinales, au résultat d'impossibilité établi par le fameux théorème d'Arrow (1963) : aucune fonction d'utilité sociale (mécanisme qui transforme tout profil de préférences individuelles ordinales en un préordre collectif) ne peut satisfaire simultanément les conditions d'unanimité, universalité, indépendance et non-dictature. Les définitions qui suivent sont une adaptation des trois dernières conditions au contexte des préférences trichotomiques.

• **Universalité (U)** : Une fonction d'agrégation vérifie la condition d'universalité (ou de domaine non restreint) si son domaine de définition est $D(X)$.

• **Absence de dictature (D)** : Une FTC f (resp. une FTS g) est non dictatoriale si pour toute population N et pour tout individu j dans N, il existe un profil $\pi = (T_i)_{i\in N}$ tel que $f(\pi) \neq R_j$ (resp. $g(\pi) \neq Y_j$, où Y_j est la première classe d'indifférence non vide de l'individu j) [11].

11. La première classe d'indifférence non vide dans la préférence trichotomique $T_j = A_jB_jC_j$ de l'individu j est définie par : $Y_j = A_j$ si $A_j \neq \emptyset$, $Y_j = B_j$ si $A_j = \emptyset$ et $B_j \neq \emptyset$, et $Yj = C_j$ si $A_j = B_j = \emptyset$.

Pour une préférence individuelle $T = ABC$ et une paire d'options $\{x, y\}$, notons $T_{|\{x,y\}}$ la restriction de T à $\{x, y\}$: la préférence trichotomique obtenue, à partir de T, en réduisant l'ensemble d'options à cette paire. Désignons par $\pi_{|\{x,y\}}$ la restriction du profil π à $\{x, y\}$ (restriction de toutes les préférences individuelles à $\{x, y\}$). De même, la restriction à $\{x, y\}$ d'un préordre R dans $R(X)$ sera noté $R_{|\{x,y\}}$.

• **Indépendance par rapport aux options non pertinentes (I)** : Une FTC f vérifie la condition d'indépendance (par rapport aux options non pertinentes) si la préférence collective entre deux options ne dépend que de leurs positions relatives dans les préférences individuelles :

$$\forall \pi, \pi' \in D(X), \forall x, y \in X, (\pi_{|\{x,y\}} = \pi'_{|\{x,y\}}) \Rightarrow f(\pi)_{|\{x,y\}} = f(\pi')_{|\{x,y\}}.$$

Contrairement aux fonctions d'utilité sociale, la méthode $EV3$, comme toutes les autres procédures de vote par note, permet de dépasser le constat d'impossibilité établi par le théorème d'Arrow. En effet, en plus du principe de Pareto, *la FTC f^E remplit les conditions (U), (D) et (I)*[12] :

La condition d'universalité est immédiate : la comparaison des scores conduit, quelque soit le profil, à un classement collectif cohérent. Un simple exemple permet de voir qu'aucune dictature n'est possible. Pour un individu j dans N, choisissons deux options distinctes, x et y, dans X et considérons le profil π défini par $T_j = \{x\}\{y\}(X \setminus \{x, y\})$ et $T_i = \{y\} - (X \setminus \{y\})$ pour $i \neq j$. L'option y obtient le plus haut score et figure donc seule à la tête du préordre collectif. D'où $f^E(\pi) \neq R_j$. L'indépendance de f^E vient du fait que le score obtenu par un candidat ne dépend que de ses positions dans les préférences individuelles, et non pas des places occupées par les autres candidats. Ainsi, lorsque $\pi_{|\{x,y\}} = \pi'_{|\{x,y\}}$, nous avons forcément $S_v(\pi, x) = S_v(\pi', x)$ et $S_v(\pi, y) = S_v(\pi', y)$. Par conséquent, $f^E(\pi)_{|\{x,y\}} = f^E(\pi')_{|\{x,y\}}$. $\square$

3.3. **Critères majoritaires.** Dans le cas où il n'y a que deux options, le vote à la majorité constitue le moyen le plus « naturel » de la décision collective : le candidat x est considéré comme collectivement préféré au candidat y s'il y a plus d'individus qui préfèrent x à y. La généralisation de ce principe, au cas où trois options ou plus sont à départager, serait de choisir le candidat qui bat tous ses concurrents dans des duels majoritaires. Un tel candidat est appelé *vainqueur de Condorcet* (ou option majoritaire). Malheureusement, cette règle, connue sous le nom de *condition (ou critère) de Condorcet*, n'est pas toujours opérationnelle, et son application se limite aux situations où une option majoritaire existe.

• **Critère de Condorcet (V.C)** : Une FTC f vérifie le critère de Condorcet si l'option majoritaire, lorsqu'elle existe, est préférée collectivement à toutes les autres options : pour tout profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$, de taille n, et pour toute option x,

$$(\forall y \in X \setminus \{x\}, |\{i \in N : xP_iy\}| > \frac{n}{2}) \Rightarrow (\forall y \in X \setminus \{x\}, xP(f(\pi))y).$$

Une FTS g vérifie le critère de Condorcet si l'option majoritaire, lorsqu'elle existe, est la seule option gagnante : pour tout profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$, de taille n, et pour toute

12. Il est clair que la FTS g^E satisfait les axiomes (U) et (D), nous ne proposons pas ici de version de la condition (I) compatible avec le contexte de sélection.

option x,

$$(\forall y \in X \setminus \{x\}, |\{i \in N : xP_iy\}| > \frac{n}{2}) \Rightarrow (g(\pi) = \{x\}).$$

L'exemple suivant montre que *la méthode $EV3$ viole la condition de Condorcet* :

Considérons un ensemble de trois candidats, $X = \{a, b, c\}$, et un ensemble de cinq votants. Soit π le profil défini par :

$$\begin{array}{cccl} \{b\} & - & \{a,c\} & \text{(2 votants)} \\ \{a\} & \{b\} & \{c\} & \text{(3 votants)} \end{array}$$

Cette notation indique que deux votants choisissent la préférence $\{b\} - \{a, c\}$ et les trois autres optent pour la partition $\{a\}\{b\}\{c\}$. Le candidat a est le vainqueur de Condorcet pour le profil π. Les scores des options a, b et c étant respectivement 6, 7 et 0, la FTC f^E place le candidat b en tête de la préférence collective. Ce même candidat est l'unique vainqueur de la FTS g^E. □

Le deuxième critère de conformité au principe majoritaire concerne *l'option minoritaire* (ou perdant de Condorcet), celle qui perd toutes les confrontations majoritaires.

• **Condition de perdant de Condorcet (P.C)** : Une FTS g vérifie la condition (P.C) si l'ensemble de choix collectif ne contient jamais un perdant de Condorcet : pour tout profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$, de taille n, et pour toute option x,

$$(\forall y \in X \setminus \{x\}, |\{i \in N : xP_iy\}| < \frac{n}{2}) \Rightarrow (x \notin g(\pi)).$$

Il n'est pas difficile de voir que *la condition (P.C) n'est pas respectée par la méthode $EV3$* :

Pour $X = \{a, b, c\}$ et avec cinq votants, considérons le profil π' défini par :

$$\begin{array}{cccl} \{b\} & - & \{a,c\} & \text{(2 votants)} \\ - & \{a,c\} & \{b\} & \text{(3 votants)} \end{array}$$

Le candidat b est le perdant de Condorcet. C'est, pourtant, lui qui gagne l'élection : les scores des options a, b et c étant respectivement 3, 4 et 3, nous avons $g^E(\pi') = \{b\}$. □

L'une des critiques émises à l'encontre de la notion d'option majoritaire est que les majorités qui font d'un candidat x un vainqueur de Condorcet peuvent être très instables : le groupe qui soutient x contre y peut être très différent de celui qui préfère x à z. Le concept de perdant de Condorcet souffre du même défaut. Les conditions (V.C) et (P.C) peuvent donc être affaiblies en limitant leur application aux situations impliquant des majorités stables. On introduit ainsi les notions d'*option fortement majoritaire* (candidat soutenu par la même majorité contre tous ses adversaires) et d'*option fortement minoritaire* (candidat qu'un même groupe majoritaire juge moins bon que tous ses rivaux).

• **Condition (V.C$^-$)** : Une FTS g vérifie la condition (V.C$^-$) si l'option fortement majoritaire, lorsqu'elle existe, est la seule option gagnante : pour tout profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$, de taille n, et pour toute option x,

$$(|\{i \in N : xP_iy, \forall y \neq x\}| > \frac{n}{2}) \Rightarrow (g(\pi) = \{x\}).$$

• **Condition (P.C$^-$)** : Une FTS g vérifie la condition (P.C$^-$) si l'ensemble de choix collectif ne contient jamais une option fortement minoritaire : pour tout profil $\pi = (T_i)_{i\in N}$, de taille n, et pour toute option x,

$$(|\{i \in N : yP_i x, \forall y \neq x\}| > \frac{n}{2}) \Rightarrow (x \notin g(\pi)).$$

Bien que peu exigeantes, *les conditions (V.C$^-$) et (P.C$^-$) ne sont pas vérifiées par le vote par notes à trois niveaux* :

Il suffit de reprendre les deux exemples qui ont permis d'illustrer le viol des conditions (V.C) et (P.C) par la méthode $EV3$. Le candidat a est, en fait, l'option fortement majoritaire du profil π. Nous avons, pourtant, $g^E(\pi) = \{b\}$. Dans le profil π', l'option b est fortement minoritaire mais $g^E(\pi') = \{b\}$. □

3.4. **Conditions de renforcement.** La notion de renforcement englobe les propriétés de *séparabilité* et de *consistance*, introduites, dans le cadre de l'agrégation des préférences ordinales, par Smith (1973) et par Young (1975). L'idée est la suivante : supposons que deux groupes distincts de votants doivent, avec la même règle de décision collective appliquée à un même ensemble de candidats, choisir un sous-ensemble de vainqueurs (contexte de sélection). La condition de consistance exige alors que si un candidat est dans l'ensemble de choix pour chaque groupe de votants, il doit rester dans l'ensemble de choix lorsque les deux populations sont réunies. Cette condition s'étend au contexte de rangement, on parle alors de séparabilité : si l'option x est collectivement considérée comme au moins aussi bonne que l'option y par deux groupes distincts de votants, alors cette opinion doit être aussi celle de la réunion des deux groupes. Si de plus l'un des groupes préfère strictement x à y, la réunion des deux groupes doit aussi préférer strictement x à y.

• **Consistance (C)** : Une FTS g est consistante si pour tous profils π, π' dans $D(X)$, $(g(\pi) \cap g(\pi') \neq \emptyset) \Rightarrow g(\pi + \pi') = g(\pi) \cap g(\pi')$.

• **Séparabilité (S)** : Une FTC f est séparable si pour tous profils π, π' dans $D(X)$ et pour tout x, y dans X,

(1) $(xf(\pi)y$ et $xf(\pi')y) \Rightarrow xf(\pi + \pi')y$

(2) $(xf(\pi)y$ et $xP(f(\pi'))y) \Rightarrow xP(f(\pi + \pi'))y$

Ces deux critères de stabilité du résultat collectif sont respectés par la méthode $EV3$. En effet, *la FTS g^E est consistante et la FTC f^E est séparable* :

Ceci vient de la linéarité des scores : pour x dans X et π, π' dans $D(X)$,

$$S_v(\pi + \pi', x) = S_v(\pi, x) + S_v(\pi', x) \qquad (1)$$

Si x est dans $g^E(\pi) \cap g^E(\pi')$, nous avons : $S_v(\pi, x) \geq S_v(\pi, y)$ et $S_v(\pi', x) \geq S_v(\pi', y)$, pour tout y dans X. En utilisant l'égalité (1), on obtient $S_v(\pi + \pi', x) \geq S_v(\pi + \pi', y)$. Donc x appartient à $g^E(\pi + \pi')$. Ce qui montre que $g^E(\pi) \cap g^E(\pi')$ est inclus dans $g^E(\pi + \pi')$. Pour l'autre inclusion, supposons, par contradiction, qu'il existe une option x dans $g^E(\pi + \pi')$ qui ne soit pas dans $g^E(\pi) \cap g^E(\pi')$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que x est dans $g^E(\pi + \pi')$ et non dans $g^E(\pi')$. Pour que ceci soit possible, il faut que le score de x, pour le profil π, soit strictement supérieur aux scores de tous les autres candidats. Par conséquent, $g^E(\pi) = \{x\}$ et $x \notin g^E(\pi')$. Ce qui contredit l'hypothèse $g^E(\pi) \cap g^E(\pi') \neq \emptyset$. La séparabilité de f^E se démontre facilement en utilisant l'égalité (1). □

Il existe, naturellement, des critères de renforcement moins contraignants que les propriétés (C) et (S). Parmi ces conditions, l'axiome d'*homogénéité* est souvent associé au niveau minimal de stabilité des méthodes d'agrégation. Il indique que le résultat collectif doit être le même pour les profils π, 2π, 3π, etc. Une autre notion de renforcement, intermédiaire entre l'homogénéité et la consistance et connue sous le nom de *consistance faible*, restreint l'application de l'axiome de consistance aux situations où le résultat collectif est identique pour les profils π et π'. Initialement introduite par Saari (1994) dans un contexte de sélection, cette propriété s'étend aisément au cadre de rangement.

• **Homogénéité (H)** : Une Fonction d'agrégation F est homogène si pour tout profil π dans $D(X)$ et pour tout entier naturel non nul t , $F(t\pi) = F(\pi)$.

• **Consistance faible (C.F)** : Une FTS g est faiblement consistante si pour tous profils π, π' dans $D(X)$, $(g(\pi) = g(\pi')) \Rightarrow g(\pi + \pi') = g(\pi) = g(\pi')$.

• **Séparabilité faible (S.F)** : Une FTC f est faiblement séparable si pour tous profils π, π' dans $D(X)$, $(f(\pi) = f(\pi')) \Rightarrow f(\pi + \pi') = f(\pi) = f(\pi')$.

Il est évident que *la méthode $EV3$ satisfait les propriétés (H), (C.F) et (S.F).* En effet, ces trois conditions s'obtiennent comme des conséquences de la consistance et de la séparabilité.

3.5. **Monotonie.** Cette propriété décrit un comportement « logique » que doit avoir une méthode d'agrégation face à la modification des préférences des votants : un candidat qui bénéficie d'un soutien accru de la population ne doit pas voir se dégrader sa position au regard de la décision collective. Pour une option x dans X et un profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$ dans $D(X)$, notons $L_x(\pi)$ l'ensemble des profils obtenus, à partir de π, en changeant la préférence d'un seul votant j en faveur de x (en faisant passer, dans T_j, l'option x à une classe d'indifference supérieure : de C à B, de B à A, ou de C à A). Pour deux options distinctes x et y, désignons par $L_{xy}(\pi)$ l'ensemble des profils $\pi' = (T'_i)_{i \in N}$ obtenus, à partir de π, en changeant, pour un seul votant j, la préférence relative sur la paire $\{x, y\}$ en faveur de x : si yP_jx (resp. yI_jx) dans T_j, alors xI'_jy (resp. xP'_jy) dans T'_j.

• **Monotonie (M)** : Une FTC f est monotone si, pour tous x, y dans X et pour tous profils π, π' dans $D(X)$ tels que $\pi' \in L_{xy}(\pi)$, $xf(\pi)y \Rightarrow xf(\pi')y$.
Une FTS g est monotone si, pour toute option x dans X et pour tous profils π, π' dans $D(X)$ tels que $\pi' \in L_x(\pi)$, $x \in g(\pi) \Rightarrow x \in g(\pi')$.

• **Monotonie stricte (M.S)** : Une FTC f est strictement monotone si, pour tous x, y dans X et pour tous profils π, π' dans $D(X)$ tels que $\pi' \in L_{xy}(\pi)$, $xf(\pi)y \Rightarrow xP(f(\pi'))y$.
Une FTS g est strictement monotone si, pour toute option x dans X et pour tous profils π, π' dans $D(X)$ tels que $\pi' \in L_x(\pi)$, $x \in g(\pi) \Rightarrow g(\pi') = \{x\}$.

La condition (M.S) représente la version forte de la propriété de monotonie. Elle exige que tout changement, dans une préférence individuelle, en faveur d'un candidat, soit traduit par une amélioration du résultat final concernant ce candidat.

Il est clair que *les deux conditions (M) et (M.S) sont satisfaites par La méthode de vote par note à trois niveaux (en tant que FTC et en tant que FTS)* :

Il suffit de montrer la monotonie stricte, la condition (M) résulte de la condition (M.S). Soit x dans X et π, π' dans $D(X)$ tels que $\pi' \in L_x(\pi)$. Si x est dans $g^E(\pi)$, son score, pour π, est supérieur ou égal aux scores des autres candidats. Ce score devient, dans π', strictement supérieur à tous les autres : en passant à une classe de préférence supérieure, l'option x gagne au moins un point. D'où $g^E(\pi') = \{x\}$. Un raisonnement analogue prouve que f^E est strictement monotone. □

3.6. **Autres conditions.** Pour clore cette étude axiomatique, nous confrontons la méthode $EV3$ à une dernière série de critères normatifs : *participation*, *continuité*, *annulation*, *neutralité par rapport aux profils d'inversion* et *symétrie par inversion.* La condition de participation (voir Moulin, 1988), traduit le fait qu'il est préférable pour un individu de voter que de s'abstenir. La notion de continuité a été utilisée par Smith (1973) et par Young (1975) dans la caractérisation des règles positionnelles simples [13]. Dans un contexte de rangement, cette condition, connue sous le nom de *propriété archimédienne*, indique que pour tout profils π et π' dans $D(X)$, si une option x est préférée collectivement à une option y pour le profil π, alors la préférence collective sur la paire $\{x, y\}$ ne doit pas changer lorsqu'un nombre suffisamment grand de « copies » de ce profil est réuni au profil π'.

• **Participation (PR)** : Une FTS g vérifie la condition de participation si pour tout profil π et pour tout votant i, en désignant par π_{-i} le profil obtenu à partir de π en retirant la préférence de l'individu i,

$$(|g(\pi)| = 1 \text{ et } |g(\pi_{-i})| = 1) \Rightarrow g(\pi) R_i g(\pi_{-i}).$$

• **Continuité (CN)** : Une FTS g est continue si, pour tous profils π, π' dans $D(X)$, il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow g(n\pi + \pi') = g(\pi).$$

Une FTC f est archimédienne si, pour tous profils π, π' dans $D(X)$ et pour toutes options x, y dans X telles que $xP(f(\pi))y$, il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow xP(f(n\pi + \pi'))y.$$

Les conditions de participation et de continuité sont satisfaites par la méthode $EV3$:

Considérons un profil π et un individu i tels que $g^E(\pi) = \{x\}$ et $g^E(\pi_{-i}) = \{y\}$. Supposons, par contradiction, que yP_ix. L'option y se trouve donc, dans la préférence de l'individu i, dans une classe d'indifférence supérieure à celle de x : $y \in A_i$ et $x \in B_i$ ou $y \in A_i$ et $x \in C_i$ ou $y \in B_i$ et $x \in Ci$. Par conséquent, $S_v(T_i, y) > S_v(T_i, x)$, où T_i désigne le profil formé par la seule préférence de i. Nous avons aussi $S_v(\pi_{-i}, y) > S_v(\pi_{-i}, x)$, car $g^E(\pi_{-i}) = \{y\}$. Par la linéarité des scores, on obtient $S_v(\pi, y) > S_v(\pi, x)$. Ce qui contredit l'hypothèse $g^E(\pi) = \{x\}$. Nous devons donc avoir xR_iy. Ce qui prouve que g^E satisfait la condition (PR). Pour la condition (CN), nous montrons que f^E est archimédienne, un raisonnement analogue permet d'établir la continuité de g^E. Soit

13. Les règles positionnelles simples (ou classements par points) font partie des systèmes de vote par classement. Leur principe est d'attribuer un certain nombre de points à chacun des rangs possibles qu'un candidat peut occuper dans les ordres de préférence des votants et choisir les options qui obtiennent le score le plus élevé.

π, π' deux profils et x, y deux options tels que $xP(f^E(\pi))y$. Si $xP(f^E(\pi'))y$ ou $xI(f^E(\pi'))y$, par la linéarité des scores, nous avons $xP(f(n\pi+\pi'))y$ pour tout entier $n \geq 1$. Il suffit donc de prendre $n_0 = 1$. Si $yP(f^E(\pi'))x$, soit $\delta = S_v(\pi', y) - S_v(\pi', x)$ et $\gamma = S_v(\pi, x) - S_v(\pi, y)$. Les nombres δ et γ sont strictement positifs, et pour tout entier n, on a : $S_v(n\pi + \pi', x) - S_v(n\pi + \pi', y) = n\gamma - \delta$. Il suffit donc de définir n_0 comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à la fraction $\frac{\gamma}{\delta}$pour avoir $xP(f(n\pi + \pi'))y$ pour tout $n > n_0$. □

La condition d'annulation indique que lorsqu'aucune option n'est préférée à une autre par une majorité de votants, le résultat collectif doit être l'égalité entre toutes les options. Dans cette définition, pour chaque paire d'options, seules les préférences strictes sont prises en considération. Les indifférences, c'est-à-dire les cas où les deux options se trouvent dans la même classe d'indifférence, ne sont pas comptabilisées.

• **Annulation (AN)** : Une FTC f vérifie la condition d'annulation si pour tout profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$ dans $D(X)$,

$$(\forall x, y \in X, |\{i \in N : xP_iy\}| = |\{i \in N : yP_ix\}|) \Rightarrow (\forall x, y \in X, xI(f(\pi))y).$$

Une FTS g vérifie la condition d'annulation si pour tout profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$ dans $D(X)$,

$$(\forall x, y \in X, |\{i \in N : xP_iy\}| = |\{i \in N : yP_ix\}|) \Rightarrow g(\pi) = X.$$

Il n'est pas surprenant de constater que *la méthode $EV3$ viole la condition d'annulation.* En effet, cette propriété ne tient pas compte de l'intensité des préférences individuelles et compense les cas où un individu préfère fortement un candidat x à un candidat y (en mettant x dans la catégorie A et y dans la catégorie C) par des cas où un autre individu préfère faiblement x à y (x dans B et y dans A ou x dans C et y dans B). Or, la méthode $EV3$ ne traite pas ces deux situations de la même manière, puisque la différence de notes est de deux points (en faveur de x) dans le premier cas et d'un seul point (en faveur de y) dans le second cas :

Pour $X = \{a, b, c\}$ et avec quatre votants, soit π le profil suivant :

$$\begin{array}{cccl} \{b\} & - & \{a,c\} & \text{(2 votants)} \\ - & \{a,c\} & \{b\} & \text{(2 votants)} \end{array}$$

Dans ce profil, aucune option n'est préférée à une autre par une majorité de votants. Cependant, les scores des trois candidats sont : 2 points pour a, 4 pour b et 2 pour c. D'où $g^E(\pi) = \{b\}$, ce qui montre que g^E viole la condition (AN). Ce critère n'est pas respecté, non plus, par f^E : dans le préordre $f^E(\pi)$, l'option b arrive seule en tête, les options a et c se partagent la dernière position. □

La condition de *neutralité par rapport aux profils d'inversion* est une version faible de la propriété d'annulation. Introduite par Saari (1999) dans le cadre des systèmes de vote par classement, elle restreint le champ d'application de la condition (AN) à des profils particuliers que l'on peut qualifier de profils d'inversion. Il s'agit de profils composés d'une préférence individuelle stricte P et de son inverse, noté $\overline{P}$: pour tous x, y dans X, xPy si et seulement si $y\overline{P}x$. Dans ce type de profil, pour chaque paire de candidats $\{x, y\}$, un seul votant préfère x à y et un seul votant préfère y à x. Aucune option n'est donc favorisée par cette configuration symétrique, et il semble naturel que cette situation soit associée à une égalité entre tous les candidats. Pour adapter cette condition au cadre formel de ce travail, nous désignons par $\overline{T}$ l'inverse de la préférence trichotomique T : si $T = ABC$, alors

$\overline{T} = A'B'C'$, avec $A' = C$, $B' = B$ et $C' = A$. Un profil d'inversion est un profil constitué d'une préférence trichotomique et de son inverse.

• **Neutralité par rapport aux profils d'inversion (NPI)** : Une FTC f est neutre par rapport aux profils d'inversion si pour tout profil d'inversion π,

$$\forall x, y \in X, xI(f(\pi))y.$$

Une FTS g est neutre par rapport aux profils d'inversion si pour tout profil d'inversion π, $g(\pi) = X$.

La symétrie par inversion est le dernier critère que nous considérons dans le cadre de ce travail. Cette propriété, qui fait aussi appel à la notion de préférences inverses, peut s'énoncer de la manière suivante : si un candidat est gagnant et si l'on inverse toutes les préférences individuelles, ce même candidat doit perdre. Pour un profil $\pi = (T_i)_{i \in N}$ dans $D(X)$, notons $\overline{\pi}$ le profil inverse de π, défini par $\overline{\pi} = (\overline{T_i})_{i \in N}$.

• **Symétrie par inversion (SI)** : Une FTS g vérifie la condition de symétrie par inversion si, pour tout profil π dans $D(X)$ tel que $g(\pi) \neq X$, et pour toute option x dans X, $x \in g(\pi) \Rightarrow x \notin g(\overline{\pi})$.

Le vote par note à trois niveaux respecte les conditions (NPI) et (SI) :

La neutralité de la méthode $EV3$ par rapport aux profils d'inversion est immédiate : dans un profil d'inversion π, et pour toutes les configurations possibles, chaque option se trouve ou bien deux fois dans la catégorie B, ou bien une fois dans la classe A et une fois dans la classe C. Par conséquent, les candidats obtiennent tous un score égal à 2. D'où $g^E(\pi) = X$ et $xI(f^E(\pi))y$ pour tous x, y dans X. Montrons que g^E satisfait la condition (SI). Soit π un profil de taille n tel que $g^E(\pi) \neq X$. Soit x une option dans $g^E(\pi)$. Il existe forcément une option y dans X telle que $S_v(\pi, x) > S_v(\pi, y)$. Remarquons que lorsqu'une option se trouve, pour une préférence individuelle T, dans une classe correspondant à une note α, alors elle se retrouve, pour la préférence $\overline{T}$, dans la classe qui correspond à la note $2 - \alpha$. D'où $S_v(\overline{\pi}, x) = 2n - S_v(\pi, x)$ et $S_v(\overline{\pi}, y) = 2n - S_v(\pi, y)$. Il en résulte que $S_v(\overline{\pi}, x) < S_v(\overline{\pi}, y)$, et par conséquent que $x \notin g^E(\overline{\pi})$. □

4. Discussion

Au cours de cette étude, le système de vote par évaluation à trois niveaux a été confronté à un ensemble de conditions normatives adaptées au contexte des préférences trichotomiques. Ce nouveau cadre formel, plus large que celui proposé par Hillinger (2004a), semble plus approprié à l'analyse des propriétés théoriques de la méthode $EV3$. Il permet, en outre, de comparer cette procédure à d'autres systèmes de vote modélisables par des fonctions d'agrégation trichotomiques : la procédure ACE proposée par Yilmaz (1999) [14], la méthode de la valeur majoritaire décrite par Balinski et Laraki (2007) [15] , ou encore les systèmes de vote par note (à trois niveaux) qui utilisent une échelle d'évaluation autre que le vecteur $(2, 1, 0)$.

Une première lecture des résultats de ce passage au crible des critères normatifs met en évidence un réel contraste entre la capacité de la méthode $EV3$ à satisfaire un très grand nombre de conditions et sa faiblesse au regard des principes majoritaires.

14. Abréviation du terme anglais "Approval-Condorcet-Elimination procedure".
15. Il s'agit, plus précisément, d'un cas particulier de la méthode de la valeur majoritaire, celui où l'échelle d'évaluation ne comporte que trois valeurs.

En effet, sur la vingtaine de propriétés présentées, seules les normes majoritaires (V.C, P.C, V.C^{-}, P.C^{-}) et la condition d'annulation ne sont pas vérifiées par cette procédure. Le viol de ces axiomes constitue à l'évidence un défaut important du vote par note à trois niveaux. Il convient toutefois de relativiser la portée de cet inconvénient. En premier lieu, le viol d'une propriété peut être un événement rare et l'analyse probabiliste menée en appendice permet de penser que le viol du critère de Condorcet est finalement plus fréquent avec les règles de vote habituellement utilisées dans le domaine politique qu'avec la méthode $EV3$, dès lors que le nombre d'options soumises au choix est supérieur à quelques unités. Notons ensuite que, même dans un cadre purement ordinal, l'élection du vainqueur de Condorcet ne constitue pas toujours un choix collectif incontestable (voir, par exemple, Fishburn, 1974 ; Saari, 1994, 1999). Remarquons enfin que le critère de Condorcet (comme tous les autres principes majoritaires) devient peu pertinent dans un contexte de vote par évaluation, puisque l'information sur l'intensité des préférences (cardinales) des votants se trouve totalement ignorée.

Un examen plus attentif des propriétés vérifiées par la méthode $EV3$ permet de constater qu'elle répond favorablement à (au moins) trois systèmes d'axiomes correspondant à des résultats importants de la théorie du choix social. Par exemple, il est facile de voir que cette procédure de vote permet de dépasser le constat d'impossibilité établi par le théorème d'Arrow (elle vérifie les conditions U, P, I et D). Il est aussi intéressant de noter qu'elle remplit les conditions du théorème de May (anonymat, neutralité et monotonie stricte) et qu'elle satisfait également aux systèmes d'axiomes utilisés, dans la caractérisation des classements par points, par Smith (1973) et Young (1975) : neutralité, anonymat, séparabilité et propriété archimédienne dans le cadre de rangement (conditions N, A, C et CN, dans le contexte de sélection). L'ensemble de ces propriétés est cependant commun à toutes les autres méthodes de vote par note et ne permet pas donc d'obtenir une justification théorique propre à la procédure $EV3$.

De toutes les conditions étudiées, la neutralité par rapport aux profils d'inversion (NPI) est l'unique propriété qui sépare cette méthode des autres systèmes de vote par note à trois niveaux : dans un profil d'inversion, seul un écart constant entre les notes correspondant aux classes A, B et C permet d'obtenir une égalité entre tous les candidats. En intégrant cette propriété discriminante à un ensemble d'axiomes incluant (principalement) les conditions de neutralité, anonymat, consistance et continuité, peut-on parvenir à une caractérisation axiomatique de la procédure $EV3$? Au terme de ce travail, nous n'avons pas encore de réponse à cette question.

5. Conclusion

Le but de cette étude était de connaître les premières propriétés axiomatiques de la méthode de vote par note à trois niveaux. Il ressort de cette analyse théorique que les points forts de cette méthode de décision concernent principalement les conditions d'indépendance, de renforcement, de monotonie, et de participation. L'incompatibilité totale de la procédure $EV3$ avec les principes majoritaires classiques ne doit pas surprendre et ne constitue pas une raison suffisante pour la disqualifier, en raison d'une part de la différence conceptuelle entre l'approche majoritaire et le principe d'évaluation et d'autre part des calculs d'efficacité majoritaire que nous avons menés et qui tendent à démontrer la supériorité de la règle $EV3$ sur d'autres règles d'usage courant. En dehors de la condition (NPI), tous les avantages de cette méthode sont partagés par les autres systèmes de vote par note. La recherche des qualités propres à ce nouveau mode de scrutin doit donc être poursuivie.

Appendice : Estimation de l'efficacité de Condorcet des systèmes de vote.

La notion d'efficacité de Condorect (voir par exemple Gehrlein et Lepelley, 2010) a été introduite dans la littérature pour évaluer l'aptitude des systèmes de vote à satisfaire les critères de type majoritaire, au premier rang desquels figure le critère de Condorcet. De façon précise, l'efficacité de Condorcet d'une règle particulière se définit comme la probabilité conditionnelle de l'élection du vainqueur de Condorcet, sachant qu'un tel candidat existe.

L'étude que nous présentons ci-dessous compare l'efficacité de Condorcet de six systèmes de vote à l'aide de simulations aléatoires de type Monte Carlo. Ces systèmes sont les suivants :

- la règle de la pluralité,
- la règle de la pluralité négative,
- la règle de Borda,
- le vote majoritaire à deux tours,
- le vote par approbation (ou vote par assentiment),
- le vote par évaluation (version *EV3*).

La *règle de la pluralité*, utilisée dans les élections politiques de nombreux pays, consiste pour chaque électeur à choisir le nom d'un des candidats en lice ; le vainqueur de l'élection est celui qui recueille le plus grand nombre de suffrage. La *règle de la pluralité négative* est d'un usage moins courant : chaque électeur indique le candidat qu'il classe en dernière position dans son ordre de préférence et le candidat qui recueille le moins de votes est élu. La *règle de Borda* est une méthode de classement par points, qui suppose que les électeurs sont en mesure d'ordonner tous les candidats en lice : dans une élection à m candidats, chaque électeur donne m-1 points au candidat qu'il préfère, m-2 points au candidat qu'il classe en deuxième position,..., 1 point au candidat qu'il classe en avant-dernière position et 0 point à celui qu'il classe dernier ; le candidat qui obtient le score total le plus élevé est élu. Le *vote majoritaire à deux tours* est la règle utilisée pour les élections présidentielles en France : un candidat est élu au premier tour s'il obtient plus 50% des voix ; dans le cas contraire, un duel majoritaire est organisé entre les deux candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de voix. Le *vote par évaluation* et le *vote par approbation* ont été définis et présentés dans le corps du texte.

Les simulations aléatoires et les calculs probabilistes effectués en théorie du vote sont très généralement fondés sur une hypothèse d'équiprobabilité des différents états de l'opinion. On suppose par exemple que tous les ordres de préférences possibles sur l'ensemble des candidats ont la même probabilité d'occurrence (hypothèse dite de "culture impartiale"). Le processus de génération des préférences individuelles utilisé dans la présente étude est différent (et original) dans la mesure où il se fonde sur l'hypothèse d'une évaluation cardinale des candidats par les électeurs : chaque électeur attribue à chaque candidat une note tirée au hasard dans une loi uniforme sur l'intervalle [0,1]. Etant donné un nombre n d'électeurs et un nombre m de candidats, un "profil de préférences" est ainsi une matrice (m,n) de nombres compris entre 0 et 1. Le passage de ce profil de préférences cardinales au vote des électeurs s'effectue de la manière suivante. Soit *e(i,j)* l'évaluation du candidat i par l'électeur j. Dans un vote par évaluation, l'électeur j donnera au candidat i une note de 2 si $e(i,j) > 2/3$, une note de 1 si $1/3 < e(i,j) \leq 2/3$ et une note de 0 si $e(i,j) \leq 1/3$. Si la règle étudiée est le vote par approbation, l'on supposera que l'électeur j approuvera le candidat i si et seulement $e(i,j) > 1/2$. Pour les autres règles que nous considérons, les préférences ordinales de chaque électeur sont déduites du profil cardinal en classant en première position le candidat qui obtient la meilleure évaluation pour l'électeur considéré, en deuxième position celui qui obtient la meilleure évaluation parmi les candidats restants et ainsi de suite... Du profil ordinal ainsi obtenu, on déduit aisément le vote de chacun des électeurs pour les règles de la pluralité et de la pluralité négative, pour le vote majoritaire à deux tours et pour la règle de Borda.

La démarche est alors la suivante : (i) le nombre m de candidats et le nombre n de votants étant donnés, on engendre un profil de préférences cardinales ; on vérifie à l'aide du profil ordinal associé qu'il existe un vainqueur de Condorcet ; si ce n'est pas le cas, on engendre un nouveau profil cardinal... jusqu'à ce que l'on obtienne un vainqueur de Condorcet. (ii) On calcule le vainqueur pour chacune des règles étudiées ; si ce vainqueur coïncide avec le vainqueur de Condorcet, le compteur associé à la règle considérée est incrémenté d'une unité. (iii) Le processus est répété 10 000 fois pour chacun des couples (m,n) étudiés. A l'issue de ce processus, la valeur du compteur associé à chacun des systèmes de vote, divisée par 10 000, donne une estimation de son efficacité de Condorcet.

m	*EV3*	*Pluralité*	*Vote maj. 2 tours*	*Plur. négative*	*Borda*	*Approbation*
2	0.7812	1	1	1	1	0.7113
3	0.7066	0.7600	0.8987	0.7278	0.9005	0.6006
4	0.6699	0.6376	0.8002	0.5960	0.8719	0.5390
5	0.6481	0.5491	0.7121	0.5020	0.8532	0.4981
6	0.6322	0.4831	0.6430	0.4317	0.8391	0.4678
7	0.6209	0.4308	0.5846	0.3775	0.8278	0.4451
8	0.6118	0.3893	0.5360	0.3348	0.8190	0.4257
9	0.6049	0.3544	0.4944	0.2998	0.8121	0.4105
15	0.5800	0.2322	0.3383.	0.1788	0.7886	0.3513

Table 1. Estimation de l'efficacité de Condorcet de cinq systèmes de vote (m candidats, 300 votants)

Les simulations ont été effectuées pour $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ et 15 candidats et pour un nombre de votants variant de 3 à 300. Comme il apparaît que les résultats dépendent peu du nombre de votants (à partir du moment où celui est d'au moins une vingtaine), nous nous contentons ici de donner les chiffres obtenus pour 300 votants (voir Table 1). Ces résultats confirment certaines conclusions bien connues en théorie du vote : la règle de Borda possède une efficacité de Condorcet élevée et domine très largement les règles de la pluralité et de la pluralité négative ; le vote majoritaire à deux tours est plus "efficace" que la règle de la pluralité, tout en se situant loin derrière la règle de Borda dès que le nombre de candidats augmente. Mais les conclusions les plus intéressantes concernent le vote par évaluation et, dans une moindre mesure, le vote par approbation. Contrairement à ce que l'intuition pouvait (peut-être) suggérer, le vote par évaluation possède une efficacité de Condorcet relativement élevée et lorsque le nombre de candidats augmente, cette efficacité apparaît comme étant supérieure à celle de la règle de la pluralité (dès que le nombre de candidats est supérieur à 3) ainsi qu'à celle du vote majoritaire à deux tours (pour $m > 6$). Le vote par évaluation possède donc une efficacité de Condorcet supérieure à celles des modes de scrutin les plus courants dans le domaine politique ! Quant au vote par approbation, on observe que son efficacité est inférieure à celle du vote par évaluation mais sa performance est supérieure à celle de la règle de la pluralité (à laquelle on le compare souvent) et même, pour un nombre élevé de candidats, à celle du vote majoritaire à deux tours.

Références

(1) Alós-Ferrer C (2006). "A simple characterization of approval voting", *Social Choice and Welfare*, 27 : 621-625.

(2) Arrow K.J [1951](1963). *Social Choice and Individual Values*, New York : Wiley.

(3) Balinski M and Laraki R (2007). "A theory of measuring, electing and ranking". *Proceeding of the National Academy of Sciences USA*, 104 : 8720-8725.

(4) Baujard A et Igersheim H (2007). Expérimentation du vote par note et du vote par approbation lors de l'élection présidentielle française du 22 avril 2007, *Rapports et documents du Centre d'Analyse Stratégique*, disponible sur le site www.strategie.gouv.fr/

(5) Baujard A et Igersheim H (2009). Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007. Premiers résultats. *Revue Economique*, 60 : 189-202.

(6) Brams S.J and Fishburn P.C (1983). *Approval Voting*, Boston : Birkhauser.

(7) Felsenthal D.S (1989). "On combining approval with disapproval voting", *Behavioral Science*, 34 : 53-60.

(8) Fishburn, P.C (1974). "Paradoxes of voting", *American Political Science Review*, 68 :537-546.

(9) Fishburn P.C (1978a). "Axioms for approval voti ng : Direct proof", *Journal of Economic Theory*, 19 : 180-185.

(10) Fishburn P.C (1978b). "Symmetric and consistent aggregation with dichotomous preferences", in *Aggregation and Revelation of Preferences*, North-Holland, Amsterdam : J Laffont, 201-218.

(11) Gehrlein W.V and Lepelley D. (2010). *Voting Paradoxes and Group Coherence. The Condorcet Efficiency of Voting Rules*, Springer.

(12) Hillinger C (2004a). "On the possibility of democracy and rational collective choice", Discussion Paper 2004-21, University of Munich.

(13) Hillinger C (2004b). "Utilitarian collective choice and voting". Discussion Paper 2004-25, University of Munich.

(14) Hillinger C (2004c). "Voting and the cardinal aggregation of judgments", Discussion Paper 2004-09, University of Munich.

(15) Hillinger C (2005). “The case for utilitarian voting”, *Homo Oeconomicus*, 23 : 295-321.

(16) Laslier J.-F et Van der Straeten, K (2004). “Vote par assentiment pendant la présidentielle 2002 : analyse d'une expérience”, *Revue Française de Science Politique*, 54 : 99-130.

(17) May K.O (1952). “A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision”, *Econometrica*, 20 : 680-684.

(18) Moulin H (1988). “Condorcet's principle implies the no show paradox”, *Journal of Economic Theory*, 45 : 53-63.

(19) Niemi R (1984). “The problem of strategic behavior under approval voting”, *American Political Science Review*, 78 : 952-958.

(20) Saari D.G (1994). *Geometry of Voting*, Berlin : Springer Verlag.

(21) Saari D.G (1999). “Explaining all three-alternative voting outcomes”, *Journal of Economic Theory*, 87 : 313-355.

(22) Saari D.G and Van Newenhizen J (1988). “The problem of indeterminacy in approval, multiple, and truncated voting systems”, *Public Choice*, 59 : 101-120.

(23) Sertel M (1988). “Characterizing approval voting”, *Journal of Economic Theory*, 45 : 207-221

(24) Smith J.H (1973). “Aggregation of preferences with variable electorate”, *Econometrica*, 41 : 1027-1041.

(25) Weber R.J (1995). “Approval voting”, *Journal of Economic Perspectives*, 9 : 39-49.

(26) Yilmaz M.R (1999). “Can we improve upon approval voting ?”, *European Journal of Political Economy*, 15 : 89-100.

(27) Young H.P (1975). “Social choice scoring functions”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 28 : 824-838.